Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

816
357
492

jaargang 67 1991 | 1992 december

● Euclides ● ● ● ●

Redactie

3652746

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt ƒ55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. ƒ37,50; contributie zonder Euclides ƒ30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

ISSN 01.65-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

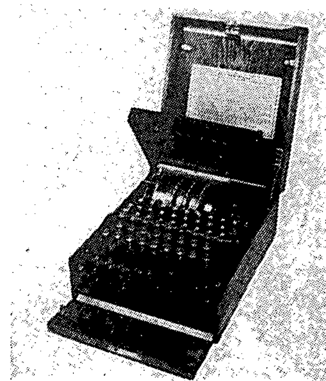
Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ60,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement ƒ39,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers ƒ10,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

● Inhoud ● ● ● ● ●



De Enigma.

► AGV binnen wiskunde A?

Ter inleiding

In verband met de mogelijke invoering van Automatische Gegevens Verwerking heeft het bestuur van de NVvW een advies opgesteld over deze zaak. Dit advies is mede gebaseerd op de commentaren die door enkele gebruikers van de pakketten SORBET en VUDYNAMO werden opgesteld.

In dit nummer zijn opgenomen:
– het beargumenteerde advies van het bestuur,
– de commentaren van vier gebruikers (namen en adressen bekend bij de redactie), en
– de reactie van de producent van SORBET (thans DataStat geheten) en VUDYNAMO op de vier commentaren.

Inmiddels heeft de Stuurgroep Verzorging Informatietechnologie de Staatssecretaris geadviseerd over te gaan tot de invoering van AGV in het vwo-programma wiskunde A, met toetsing binnen het schoolonderzoek. Omdat dit wijziging van het examenprogramma vraagt adviseert de Stuurgroep om scholen toe te staan nu reeds met AGV te beginnen.

De redactie



► AGV binnen wiskunde A

In twee projecten van PRINT (PRoject Invoering Nieuwe Technologieën), Dynamische Simulaties en Statistiek op Bestanden, wordt gewerkt aan de ontwikkeling van lesmateriaal en eindtermen op het grensgebied van wiskunde en informatica. Op grond van de resultaten van beide projecten in de klas heeft PRINT naar mogelijkheden gezocht om de geformuleerde doelstellingen breed in het wiskunde-onderwijs van de tweede fase van het vwo in te voeren.
Door PRINT wordt binnen wiskunde A voorgesteld:

– de scholen in het examenjaar 1994 de mogelijkheid te bieden te kiezen uit Correlatie en Regressie of Automatische Gegevens Verwerking (nieuwe stijl), getoetst in het schoolonderzoek,
– met ingang van het examenjaar 1995 het keuzeonderwerp te vervangen door een vast onderdeel Automatische Gegevens Verwerking,
– toetsing door middel van een praktisch schoolonderzoek waarbij de computer gebruikt wordt,
– voor de concrete invulling de keuze te geven uit Statistiek op Bestanden en Dynamische Simulatie.

Toen PRINT voor deze invoering de ondersteuning van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren vroeg, heeft het bestuur op de jaarvergadering van de vereniging op 27 oktober 1990 dit

verzoek aan de leden voorgelegd en de leden gevraagd het bestuur hierin te adviseren.
Mede op basis van de door de leden ingebrachte adviezen staat het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren positief tegenover de mogelijkheid dat scholen kiezen voor het onderdeel Automatische Gegevens Verwerking. Ten aanzien van de verplichte vervanging van het keuzeonderwerp door een vast onderdeel AGV, zoals PRINT voorstelt, heeft het bestuur de nodige bedenkingen en wel wegens de volgende vragen:

- is er wel steeds aan alle randvoorwaarden te voldoen?
- kunnen alle docenten deze nieuwe belasting wel aan?
- welke technische ontwikkelingen staan ons de eerstkomende jaren te wachten?

Het huidige onderwerp AGV kan nu met desnoods enkele praktische oefeningen aan het toetsenbord worden bestudeerd. Wanneer dit onderdeel wordt uitgebreid tot een verplicht keuzeonderwerp, met als belangrijk bestanddeel de voorgestelde softwarepakketten dan kan men organisatorische problemen verwachten met betrekking tot de beschikbaarheid van een (op de meeste scholen één) NIVO-computerlokaal. In het algemeen zal hetzelfde lokaal immers ook gebruikt moeten worden voor de lessen Informatica en voor lessen van andere vakken waarin computer toepassingen een rol spelen.
Vooral bij het laten maken van een praktisch schoolonderzoek over het onderdeel AGV kan het beschikbare aantal computers een probleem zijn.
Bovendien kan door de beperkte beschikbaarheid van een computerlokaal de invoering van AGV (met SORBET of VUDYNAMO) tot gevolg hebben dat het werken met computers als ondersteuning voor het begrip bij andere leerstofgebieden binnen wiskunde A in de knel komt.

Toetsing door middel van een schoolonderzoek in de vorm van een computerprakticum is te verkiezen boven inpassing in het centraal schriftelijk examen maar heeft als nadeel dat een docent die in tijdnood komt voor het centraal schriftelijk examen of AGV niet interessant vindt in de verleiding kan komen sterk op dit onderwerp te bezuinigen.

Het lijkt niet verstandig elk jaar hetzelfde schoolonderzoek te gebruiken. Moet er dan elk jaar nieuw materiaal bedacht worden door de docent? Daar het niet alleen om het maken van nieuwe opdrachten gaat maar ook om het aanmaken van nieuwe bestanden, is dit voor de docenten een zware extra taak.

Indien de bovengenoemde problemen goed zijn opgelost, dan blijft nog het probleem dat een niet te verwaarlozen aantal docenten te weinig bekwaam is in het geven van AGV en daardoor niet alleen met weinig resultaat maar ook met grote tegenzin aan dit onderwerp zal werken.
Een tijdige en goede nascholing, op een moment waarop het voor de docenten goed mogelijk is aan deze nascholing deel te nemen, is voor de invoering van het voorstel van PRINT vereist.

Hierbij mag er niet aan voorbijgegaan worden dat de docenten bovenbouw vwo/havo zeer zwaar belast zijn geweest en nog zijn door de ingrijpende veranderingen in de examenprogramma's bovenbouw vwo/havo. Verdergaande ontwikkelingen zullen er bovendien toe leiden dat ook het programma wiskunde B binnen enkele jaren weer zal moeten worden herzien.

Het bestuur adviseert voor de inhoud van het onderdeel AGV algemene leerdoelen op te stellen waarmee elke school zelf een invulling aan dit onderdeel kan geven. Uiteraard dient deze invulling aan de inspectie ter goedkeuring te worden voorgelegd.
Aan de docenten kunnen de pakketten SORBET en VUDYNAMO worden aangeboden om hieruit te kiezen. Ook moet de mogelijkheid bestaan een andere keuze te maken. Het is te verwachten dat we ten aanzien van het op de markt brengen van geschikte software nog stormachtige ontwikkelingen tegemoet gaan.
Voor de scholen moet de mogelijkheid open blijven in één jaar aan de leerlingen meerdere pakketten aan te bieden waaruit zij kunnen kiezen.

Advies

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren adviseert daarom:

– In de examenjaren 1994, 1995 en 1996 kunnen de scholen kiezen uit de volgende keuzeonderwerpen voor wiskunde A (vwo):
– Correlatie en Regressie,
– Automatische Gegevens Verwerking.
– Toetsing van het keuzeonderwerp vindt slechts plaats in het schoolonderzoek.
– Voor de concrete invulling van het keuzeonderwerp Automatische Gegevens Verwerking bestaat in de genoemde jaren de keuze uit Statistiek op Bestanden en Dynamische Simulatie.

Hierbij wordt verondersteld dat:
– er algemene leerdoelen voor Automatische Gegevens Verwerking geformuleerd worden,
– er tijdig en ruim de mogelijkheid geboden wordt tot goede nascholing waarbij ook aandacht gegeven moet worden aan de praktische problemen en de oplossing daarvan,
– de pakketten SORBET en VUDYNAMO nog kritisch worden bekeken op gebruiksvriendelijkheid en zinvolheid van de vragen in het leerlingenmateriaal.

Gelet op de onvoorspelbaarheid van de ontwikkelingen op een aantal terreinen stelt het bestuur zich op het standpunt dat het onverstandig is nu reeds uitspraken te doen over het keuzeonderwerp voor de examenjaren na 1996.

(Over AGV)

▶ Commentaar 1

SORBET

Algemeen
Met het programma SORBET zou het keuzeonderwerp AGV op een goede manier van de grond kunnen komen. Op zich biedt het programma mogelijkheden om het onderdeel statistiek met behulp van AGV meer inhoud te geven.
De user interface van het programma is niet erg logisch. Wanneer ik zelf wat probeerde lukte het meestal niet. Het proberen van de voorbeelden ging beter. Het gevaar is dan dat je daarna niet meer weet waarom je in het begin zo zat te klungelen, maar dat komt toch doordat de user interface van het programma niet helder is.
Hieronder loop ik allerlei punten met betrekking tot het programma nog eens na.

Documentatie
Er is geen documentatie over het programma in de leerlingentekst opgenomen. Een handleiding voor de docent zou welkom zijn. Voor de leerling vind ik een uitleg over de inhoud van het programma in de leerlingentekst wel op zijn plaats.

Bedieningsgemak
Mijn stelling is dat je zonder handleiding via het scherm een programma moet kunnen bedienen. Met SORBET is me dit niet gelukt: ik werd telkens uit het programma gegooid, de computer liep vast. Toen ik de opdrachten in de leerlingentekst ging

maken lukte het beter. Wel verbaas ik me over het niet consequent gebruiken van de functietoetsen: F1, F7 en F9. Voor mij zat er geen logica in. Maar als ik nu maar deed wat er stond lukte het meestal wel. Zonder deze voorbeelden is het lastig om het programma te doorgronden.
De hulpschermen zijn niet effectief.

Structuur van het programma
De structuur van het programma is niet erg logisch. Het programma is onderverdeeld in twee delen: SORBET 0 en SORBET 1. Deze twee onderdelen doen vermoeden dat je met twee verschillende programma's te maken hebt, maar SORBET 1 draait met de in SORBET 0 geselecteerde gegevens, hoewel je ook in SORBET 1 weer kan selecteren.

Aansluiting bij de leerstof
Op zich sluit het programma goed aan bij de leerstof statistiek van wiskunde A op het vwo. Met een dergelijk krachtig programma is het mogelijk om de leerling duidelijk te maken dat de verwerking van gegevens tot allerlei verbanden en conclusies kan leiden.

Gebruik van het programma voor de lessen AGV
Automatische gegevensverwerking bij wiskunde A zou de leerlingen inzicht moeten geven in het gebruik van de computer bij problemen, die met behulp van het geleerde bij wiskunde A opgelost kunnen worden. Daar waar de rekenpartijen te uitgebreid zijn om een aantal modellen door te rekenen of waar de herschikking van de gegevens te veel tijd kost om een gestelde vraag te beantwoorden zou de computer een goed hulpmiddel kunnen zijn. Immers het medium computer is bij uitstek geschikt om gegevens te verwerken. Ook in SORBET komt dit naar voren. De lessen statistiek kunnen veel effectiever worden door het gebruik van de computer. SORBET is snel. De grafische verwerking van geselecteerde items levert een duidelijke weergave van de gezochte verbanden. Op deze wijze zou het programma een heel goede ondersteuning bij gestelde vragen kunnen zijn.
Echter ik heb veel kritiek op de leerlingentekst. De tekst zoals die er nu ligt moet aanmerkelijk worden uitgebreid. Er moet duidelijk in naar voren komen, waar de leerlingen naar moeten zoeken. De vraagstelling blijft steken in ad hoc vragen van de soort: Halen meisjes betere resultaten dan jongens op het eindexamen? (blz. 16 leerlingentekst). De leerling krijgt dan opdrachten om dit probleem op te lossen die het niveau van 'doe dit, dan dat, je krijgt dan het volgende' niet ontstijgen. Het lijkt er op dat de leerling vaardigheid moet opdoen om het programma te leren beheersen. Het programma moet echter een hulpmiddel zijn voor de wiskunde die bij dit onderdeel past, nl. het interpreteren van gegevens die met behulp van de computer snel en gemakkelijk te herschikken zijn.
Een mogelijkheid om dit te verbeteren is de gestelde problemen in te bedden in een groter probleem, waar bovengenoemde vragen een onderdeel van zijn. Op de manier zoals het nu gedaan wordt blijven het vragen met context, maar het wordt niet duidelijk waarom deze vragen gesteld worden.

Conclusie
Nadat het programma op verschillende onderdelen verbeterd (betere user interface) is, kan het, mits er goed leerlingenmateriaal gemaakt wordt, een goede hulp zijn bij de invulling van AGV als keuzeonderwerp voor wiskunde A op het vwo.

VUDYNAMO

Algemeen
Het programma VUDYNAMO zou een goed hulpmiddel kunnen zijn bij het keuzeonderwerp AGV. Het doorrekenen van allerlei groeimodellen kan op deze manier snel en gevarieerd gebeuren.
Het programma was gemakkelijk te bedienen, de user interface is logisch.

Documentatie
Achter de lessen is een beknopte handleiding over VUDYNAMO opgenomen. Deze is voldoende om snel even iets op te zoeken als je niet meer weet waar in de tekst van de lessen uitleg over een onderdeel van het programma staat.

Bedieningsgemak
De user interface van het programma is duidelijk. Na één keer een voorbeeld nadoen konden alle volgende vragen zonder handleiding worden beant-

woord. Vooral de pull-down menu's over elk onderdeel afzonderlijk maken het programma gemakkelijk te bedienen.

Structuur van het programma
De structuur van het programma is helder. Je kunt via proberen heel snel wegwijs worden in het programma. Ook de geboden hulp is gemakkelijk te vinden.

Aansluiting bij de leerstof
Het programma sluit goed aan bij de leerstof over allerlei vormen van groei zoals die voorkomen bij wiskunde A op het vwo. Het gebruik van de computer bij dit onderdeel kan een duidelijke verrijking voor het onderwijs betekenen.

Gebruik van het programma voor de lessen AGV
De lessenserie bij VUDYNAMO is een heel goede serie geworden. De auteurs hebben goede wiskundige contexten kunnen vinden. De problemen zijn zo aangeboden dat ze voor de leerlingen goed te verwerken zijn, maar wat meer is, het nut van het gebruik van de computer bij dit onderdeel komt overtuigend naar voren.
Het gaat duidelijk over wiskunde, maar het gebruik van de computer is een onmisbaar onderdeel om goed conclusies te trekken. Zonder computer zijn deze onderdelen van de wiskunde voor de leerlingen eigenlijk niet uit te voeren omdat de rekenpartijen te veel (vervelende) tijd in beslag nemen.

Conclusie
De lessenserie over dynamische simulatie, waarbij het programma VUDYNAMO gebruikt wordt, zou een goede invulling kunnen zijn voor het keuzeonderwerp AGV voor wiskunde A op het vwo.

SORBET

Een programma dat niet zo erg duidelijk is als je ermee start. Aan de hand van de handleiding/leerlingentekst wordt voor de goede leerling waarschijnlijk wel een en ander duidelijk, al zal iedereen nog wel vaak terug moeten bladeren hoe de gebruiksaanwijzing van dit programma nu ook alweer was.
Ik denk dat de achterliggende gedachten over de inhoud van het onderwerp misschien nog wel beter tot hun recht komen bij gebruik van een ander (eventueel zakelijk) programma.
Overigens viel de inhoud me mee, ik had op grond van eerdere publikaties meer gegoochel met de vraagtaal en minder mogelijkheden van de statistiek verwacht.

VUDYNAMO

Een prachtig programma, dat me echter niet zo geschikt lijkt om bij wiskunde-A op te nemen. Het zou volgens mij beter passen bij wiskunde-B, voornamelijk wat betreft het niveau van het abstracte denken dat hierbij vereist is. Het is dan ook meteen mogelijk om wiskunde-B iets dichter bij de vele toepassingen te brengen. Dit zou misschien als neveneffect hebben dat meer leerlingen toegepaste wiskunde gaan studeren (dat zou toch mooi zijn).

Correlatie en regressie

Het huidige keuzeonderwerp is naar mijn idee zo waardevol, dat je dat niet zomaar moet inwisselen voor een van de twee voorgestelde computerprogramma's. Veel beter lijkt het me om het huidige keuzeonderwerp uit te breiden zodat het rekenwerk en de grafische weergave met behulp van de computer gedaan kan worden. Te denken valt dan aan gebruiksprogramma's die op de (zakelijke) markt zijn, of aan een aanpassing van SORBET. De noodzakelijke tijd hiervoor kan dan gevonden worden in het schrappen van het gedeelte AGV dat nu nog officieel op het examenprogramma voorkomt.

Tijdschema

Het lijkt me onverstandig om de invoering van een wijziging in het huidige examenprogramma vervroegd in te voeren. Onder druk van de tijd heb ik zelf het gevoel dat ik nog niet een volledige afweging van alle voors en tegens heb kunnen maken, laat staan dat ik een goed doordracht alternatief heb kunnen aandragen. Toch lijkt me dat het mogelijk moet zijn om nieuwe ideeën nog op te kunnen nemen. Het tijdschema moet hiervoor ruimte bieden. Het wiskundeonderwijs is niet gediend met het (hals over kop) invoeren van een nieuw keuzeonderwerp dat niet goed overwogen is en waar niet het merendeel van de leraren achter staat en daarom na enkele jaren weer veranderd moet worden.

▶ Commentaar 3

Algemeen

Het lijkt mij zeker zinvol het onderwerp AGV, dat immers al vanaf het begin deel uitmaakte van het examenprogramma voor Wiskunde A, nieuw leven in te blazen. Het is duidelijk dat de huidige invulling van dit onderdeel, zoals in de meeste leerboeken wordt gepresenteerd, domweg achterhaald is: De praktijk van Computertoepassing is het stadium van stroomdiagrammen en BASIC al lang voorbij. Veel toekomstige gebruikers van toegepaste wiskunde, dus veel leerlingen, die nu het vak wiskunde A volgen, zijn gebaat bij een goede inleiding in dit onderwerp.

De twee voorgestelde programma's VUDYNAMO en SORBET, hebben beide een specifiek doel. De vraag is of er niet algemene leerdoelen van de AGV moeten worden geformuleerd, waarna de bijbehorende lesprogramma's aan deze leerdoelen getoetst kunnen worden. Het moet toch ook mogelijk zijn, de leerlingen een wat breder overzicht over de mogelijkheden op het gebied van AGV te geven, waarna een bepaald toepassingsgebied wat nader wordt bekeken.

VUDYNAMO

Dit programma sluit aan bij de behandeling van groeiprocessen, zodat het zinvol lijkt dit programma te gebruiken na de lessen over exponentiële groei etc. De uitwerking van het lesprogramma spreekt mij in het algemeen wel aan, al moet ik zeggen, dat er in verhouding veel tijd gestoken moet worden in het leren werken met VUDYNAMO. Daardoor zal men in de toepassingen niet veel verder komen dan problemen, die met andere hulpmiddelen (handmatig, rekenmachine, spreadsheet, BASIC) ook wel op te lossen zijn.

SORBET

Dit programma sluit aan bij de beschrijvende statistiek uit de wiskunde A-leerstof. Ook bij dit programma zal voor de gemiddelde leerling flink wat tijd nodig zijn om er vlot mee te leren werken. Er zou wellicht wat meer in de richting van Correlatie kunnen worden doorgewerkt, omdat juist dat aspect zich goed leent voor berekeningen met de computer.

Conclusies

— AGV kan een geschikt keuzeonderwerp zijn, maar er moeten algemene leerdoelen voor geformuleerd worden.
– VUDYNAMO en SORBET zijn beide bruikbaar. Bedacht moet worden, dat het ene programma in het verlengde van een deel van de Toegepaste Analyse, het andere juist in het verlengde van de Beschrijvende Statistiek ligt.
– Voor beide programma's geldt, dat de leerlingen m.i. behoorlijk wat gewenningstijd voor het programma nodig zullen hebben.
– Er moet voor gewaakt worden, dat het programma een doel op zich gaat worden, het is slechts een hulpmiddel.

▶ Commentaar 4

Het verenigen van twee verschillende soorten doelen (wiskunde- èn informaticadoelen) vind ik zowel in SORBET als in VUDYNAMO goed gelukt. De koppeling tussen de twee elementen komt niet kunstmatig over.

SORBET

Beschrijvende statistiek is een onderwerp waar zowel wiskundig zwakkere als sterkere leerlingen goed mee uit de voeten kunnen. Het handmatig produceren van grafische voorstellingen vinden leerlingen over het algemeen niet moeilijk, maar het is wel tijdrovend. Daarom wordt het onderwerp niet altijd volledig uitgebuit. SORBET kan veel verschillende grafische voorstellingen snel achter elkaar tevoorschijn toveren, zodat er daarna daadwerkelijk gewèrkt kan worden met de gegevens. Dat vind ik een groot winstpunt.
Ik vind het leuk, dat de leerling op een plezierige manier geconfronteerd wordt met het feit dat het van belang kan zijn iets *precies* te formuleren. Ik denk aan de structuur die middels haakjes aangebracht moet worden bij de voorwaarden die opgebouwd zijn uit logische beweringen met EN, OF en NIET.
Veel leerlingen zullen later in hun studie of hun werk te maken krijgen met een database. Dit informatica-element vind ik daarom, ook in samenhang met het statistiekonderwerp, uitstekend gekozen. Wel is het jammer dat het aanmaken van de werktabellen vrij veel tijd kost (althans, op de langzame NIVO-schoolapparatuur, en daarmee moeten de leerlingen werken). Ook zal er nog wat geschaafd moeten worden aan de tekst op het scherm. Tenslotte hoop ik, dat er naast de leerlingentekst ook een docentenhandleiding uitkomt.

VUDYNAMO

In het vak wiskunde A moeten modellen volgens het leerplan een grote rol spelen. Dat was tot nu toe niet altijd even sterk het geval, of beter gezegd: de leerlingen waren zich daarvan niet altijd even bewust. In de lessenserie „Dynamische Simulaties" komt het model-idee wèl goed uit de verf. Weliswaar wordt er in VUDYNAMO vooral gewerkt met exponentiële modellen, maar die beperking lijkt me verstandig. Wel zal de docent voldoende duidelijk moeten maken dat er ook heel andersoortige modellen bestaan. Ook de introductie van elementen uit de systeemtheorie zoals feedback spreekt me aan.
Het informatica-element, de DYNAMO-programmeertaal, past prima bij het wiskundige onderwerp maar lijkt mij voor de zwakkere leerling enigszins aan de moeilijke kant. Dat ligt ook aan de lengte van het programma; de korte programma's zullen geen problemen opleveren.

Aangezien VUDYNAMO volgens het voorstel op verschillende scholen uitgeprobeerd is, zullen de ervaringen, ook met de zwakkere A-leerlingen, toch wel positief geweest zijn, neem ik aan. Beschikt de NVvW over deze gegevens (omtrent beide pakketten)?
Op de NIVO-nascholing wiskunde 1988/1989 had ik al eens kennis gemaakt met VUDYNAMO. Volgens mij kende het programma toen ook andere systemen/voorbeelden, o.a. de bekende griep-epidemie. Is bekend op grond waarvan de voorbeelden veranderd zijn? Ook hier kost het rekenwerk vrij veel tijd. Bij sommige voorbeelden is dat wat hinderlijk als je snel verder wilt.
Het leerlingenboek ziet er aardig uit, mede door de combinatie van het algemene gedeelte met de gerichte opdrachten.

Al met al ben ik positief over de invoering van AGV als vast onderdeel van wiskunde A; de programma's SORBET en VUDYNAMO lijken me hierbij geschikt.
Het lijkt me wel verstandig in de voorlichting en nascholing veel aandacht te schenken aan *praktische* problemen èn oplossingen ervan: als AGV als officieel onderdeel verplicht getoetst gaat worden, zullen ongetwijfeld nog veel docenten straks voor het eerst echt met de klas het computerlokaal in moeten. Bovendien moeten ook de (vele?) scholen met de minimum-NIVO-configuratie het programma kunnen uitvoeren. Dat zal hier en daar niet meevallen.

● Bijdrage ● ● ● ●

(Over AGV)

► De gebruiker heeft altijd gelijk, tenzij .....

Sieb Kemme

Wie vraagt om een oordeel van deskundige gebruikers over een nieuw produkt, loopt het risico genadeloos onderuit gehaald te worden. De maker van het produkt moet daar tegen kunnen en proberen de kritiek in voordeel om te zetten. De gebruiker heeft immers altijd gelijk.
Op verzoek van de Vereniging van Wiskundeleraren heeft een viertal docenten gereageerd op het voorstel voor een nieuwe invulling van AGV in wiskunde A. Hun advies is niet eenduidig. Dat is maar goed ook. Op die manier ontstaat immers een evenwichtig beeld van de voor- en nadelen. Tenzij ... er sprake is van feitelijke onjuistheden of van onvolledige informatie. In het volgende zal ik dan ook vooral reageren op die punten waarbij dat volgens mij het geval is.

Uit één van de reacties blijkt dat de desbetreffende auteur niet op de hoogte was van het feit dat het hier gaat om informatica-onderwijs dat op een doordachte manier is geïntegreerd binnen wiskunde A. Nergens wordt aandacht besteed aan deze informatica-aspecten. Uit de paragrafen 'Gebruik van het programma voor de lessen AGV' blijkt dat de pakketten bekeken zijn door de bril van een wiskundeleraar die zich afvraagt in welk opzicht de programma's het bestaande wiskundeonderwijs zouden kunnen ondersteunen. Dat is nooit de opzet geweest en zo staat het ook niet in het voorstel. Daarmee wordt bij voorbaat tekort gedaan aan de programma's. Een aandachtige lezer van het voorstel, waarin expliciete doelstellingen over de informatica zijn opgenomen, was dit niet ontgaan.
Voor een bespreking van DataStat heeft een dergelijke onkunde in het bijzonder hele nare gevolgen. De auteur beoordeelt de structuur van het programma als 'niet erg logisch'. Zij of hij vermoedt dat er twee verschillende programma's zijn waarvan 'de een draait met de gegevens die in het andere zijn geselecteerd'. Dat is een heldere observatie. Het pakket bestaat uit een 'vraagtaal'-gedeelte en een statistiek-gedeelte. Met het vraagtaalgedeelte kunnen gegevens uit tabellen tot een nieuwe tabel worden gerangschikt, waarop vervolgens statistische bewerkingen kunnen worden losgelaten. 'Maar', vervolgt de auteur, 'je kunt in SORBET 1 ook selecteren.' Dat is ook heel helder gezien. Het gaat daar wel om andere selecties. Die selecties leveren geen nieuwe werktabel op maar zijn keuzen van variabelen waarop onmiddellijk een statistische bewerking kan worden toegepast. Om het programma voldoende efficiënt te houden, zitten deze eenvoudige selecties binnen het statistiek-gedeelte. Het betekent dat je een aantal vragen direkt in het statistiek-gedeelte kunt beantwoorden.
Waarschijnlijk ervaart de auteur het vraagtaalgedeelte als een overbodig en onnodig uitgebreid aanhangsel. Hij of zij heeft dan niet in de gaten gehad dat dit vraagtaal-gedeelte de kern is van het onderdeel 'relationele bestanden'. Het bevat alle essentiële elementen om te begrijpen hoe een relationeel databestand in elkaar zit.

Een tweede auteur betreurt het dat in het voorstel 'Correlatie en Regressie' weer van het programma zal verdwijnen. Dat zal maar ten dele het geval zijn. Correlatie en regressie is één van de opties in DataStat en scholen die voor dit programma kiezen als invulling van AGV, zullen daar gebruik van kunnen maken. Daarnaast functioneert naar mijn ervaring dit onderdeel niet zoals men zich dat had voorgesteld. Veel scholen besteden één of twee lessen aan correlatie, gevolgd door een som op het schoolonderzoek. En dat was het.
Deze auteur waarschuwt ook voor een te snelle invoering. Die kritiek is terecht, zeker zolang er

geen duidelijk zicht is op nascholing. In het definitieve voorstel is de invoering dan ook een jaar opgeschoven.
Grappig is dat de auteur constateert dat VUDYNAMO beter in wiskunde B zou thuishoren. De experimenten met VUDYNAMO zijn namelijk in wiskunde B gestart. Binnen de huidige invulling van het wiskunde B programma was dat echter niet zo'n succes.

De derde auteur wenst de formulering van algemene leerdoelen voor Automatische Gegevens Verwerking. Hier moet sprake zijn van een misverstand. Het voorstel ging vergezeld van een lijst van eindtermen, zowel ten aanzien van de Automatische Gegevensverwerking, als de twee afzonderlijke uitwerkingen daarvan.

Beide pakketten hebben in een ontwikkelperiode van drie jaar voortdurend bloot gestaan aan meedogenloze kritiek van experimenterende docenten en leerlingen en zijn als gevolg daarvan voortdurend, soms ingrijpend, aangepast. Dat heeft 'leerling-bestendige' pakketten en bruikbaar lesmateriaal opgeleverd. Voor DataStat is dat een eenvoudige vraagtaal die op een harmonische manier is gecombineerd met statistische technieken en representaties. Een dergelijke combinatie is voor Nederland volstrekt uniek. Voor VUDYNAMO is dat een volwaardige interpretatie van een professionele simulatietaal op leerlingniveau.

Tot slot voor de lezer van deze reactie nog één advies: schaf de pakketten met het bijbehorende lesmateriaal aan, probeer ze uit in de klas en overtuig uzelf!

▶ Vraagstukken

709. a. Schets een grafiek van de functie

$$y = {}^{2}\log \frac{2x-2}{x-2}$$

b. Onderzoek voor welke reële waarden van x geldt:

$$5^{\,{}^{\frac{1}{2}}\log \frac{2x-2}{x-2}} < +1$$

(Eindex. Gymn. B – 1951.)

710. Aan welke voorwaarde(n) moeten de constanten, a, a', b, b' en m voldoen, opdat de vergelijking

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{a'x+b'} = m \qquad (a > a')$$

één, resp. twee wortels heeft?

711. Als n en k natuurlijke getallen voorstellen, bewijs dan

$$\sum_{k=1}^{k=2n} \left\{(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}\right\} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$$

Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 39 (1951-1952).

▶ Het beroep van wiskundige (3)[1]

G. Y. Nieuwland

Wiskunde en de strijd om het bestaan

Jaren geleden las ik een citaat van L. E. J. Brouwer, waarvan mij slechts een fragment – en dan waarschijnlijk nog verminkt – is bijgebleven:

... *wiskunde is de door de mensheid in de strijd om het bestaan ingenomen houding*...

Als tekening van de verhouding van wiskunde en werkelijkheid is dit wel het tegendeel van de Platoonse positie die in deel 2 werd aangeduid. De strijdhouding geeft geen gelegenheid tot de beschouwende rust die nodig is om tot het besef van een ideële wereld achter de bedreigende realiteit te komen. Aan de andere kant geeft het onmiskenbare feit dat die strijd door de mensheid al eeuwen wordt volgehouden in deze visie een zeker recht tot de veronderstelling dat de daarbij als middel ingezette wiskunde tenminste doeltreffend mag worden genoemd. De vraag, of er een hoedanigheid van de buitenwereld valt aan te wijzen waarop het wiskundig denken in het bijzonder greep heeft, zou door Brouwer waarschijnlijk als zinloos afgewezen zijn. In ieder geval doet de bittere ernst van zijn positiekeus de Nederlandse lezer aangenaam aan, vooral na de frivoliteit van de stellingname die in deel 2 aan de erven Hilbert werd toegeschreven.

Hoe dan ook, de effectiviteit van de wiskundige kijk op de wereld staat nauwelijks ter discussie – slechts in wiskundige kring kan men hier en daar het standpunt aantreffen dat daarbij in strikte zin eigenlijk niet van wiskunde gesproken mag worden, zie eveneens aflevering 2 van dit opstel.

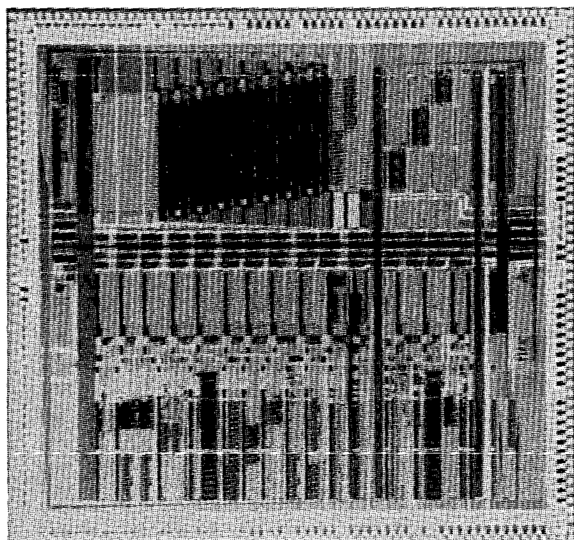
Strijd om het bestaan heeft te maken met de begrensdheid van de menselijke mogelijkheden. Zonder meer zijn die niet veel zaaks: een mens heeft een reikwijdte van een meter, kan een voorwerp van een millimeter groot nog net hanteren, verplaatst zich in een uur over zeven kilometer, kan zonder fouten honderd dingen aftellen en kan zijn aandacht gedurende twintig minuten ergens bij houden. In de strijd om het bestaan heeft hij (m/v) door het ontwikkelen van allerlei gereedschappen, werktuigen, instrumenten en transportmiddelen, maar ook met tal van organisatorische hulpmiddelen, zich aan die beperkingen weten te ontworstelen. Het is thans mogelijk zich over grote afstanden met hoge snelheid te verplaatsen, kennis te verwerven over zaken die zich op afstanden van $10^{25}m$, maar ook op $10^{-16}m$ afspelen, en voorwerpen te manipuleren op een schaal van $10^{-9}m$. Men kan verschijnselen waarbij zeer grote aantallen dingen betrokken zijn methodisch blijven overzien[2]. De verlammende werking van steeds maar hetzelfde moeten doen kan door automatisering worden overwonnen en in een organisatie kan men betrekkelijk domme mensen betrekkelijk slimme dingen tot stand laten brengen.

Tegenover de veelheid van methoden, technieken en implementatie van dit alles valt een constante factor op: des te verder deze mogelijkheden verwijderd zijn van die de mens van nature meekreeg, des te meer berust de beschrijving, besturing en beheersing daarvan op de wiskundige modellering van het aldus opengelegde veld.

Is wiskunde: het bewijzen van stellingen?

Zo gezien is het verbazingwekkend vervolgens vast te moeten stellen (zie deel 1) dat bij deze enorme op wiskundige kennis gebaseerde ontwikkeling slechts

in beperkte mate wiskundig gekwalificeerde beroepen tot stand zijn gekomen. Wiskundige kennis bleek in de historie vaak gemakkelijk in andere beroepen te incorporeren, zij het dat die kennis meestal in aangepaste vorm werd opgenomen, een transformatie die *emulgatie-proces* werd genoemd. Het resultaat bleek binnen het betrokken beroep vaak moeilijk als wiskunde erkenbaar en evenmin voor de wiskundigen daarbuiten herkenbaar. Hoe dit ook zij: bevorderlijk voor het beroepsperspectief van de wiskundigen – en dat was ons uitgangspunt – is dat alles niet.
In deel 2 werd geprobeerd een van de achtergronden van dit verschijnsel op het spoor te komen en wel een aspect dat te maken heeft met een inhoudelijk wiskundig gezichtspunt. Dit leidde ertoe de vraag onder ogen te zien of de discussies over de relaties van de wiskunde tot de werkelijkheid niet te veel zijn beïnvloed door de probleemstellingen die in de eerste helft van deze eeuw onder de naam 'grondslagen-crisis' aan de orde waren. Deze vraag is hier gemakshalve vereenvoudigd tot die in het kopje van deze paragraaf; daarmee is ook de betekenis voor ons onderwerp duidelijk, want buiten de universiteit worden beroepshalve weinig stellingen bewezen.



(foto van een chip)

... wiskunde als middel ter beheersing ... van de complexiteit ...

Wiskunde is de kunde om zeker te weten, de basis voor die zekerheid blijft dus in elke cultuurfase een belangrijke aangelegenheid. Bestaat er een *logisch* fundament voor het gebouw van de wiskunde dat eens en vooral de wiskundige zekerheid zal kunnen garanderen? Dat moet er dan anders uitzien dan indertijd Hilbert voor ogen stond, minder monolithisch, veel complexer – maar dat zoiets ooit door de logici ten genoege van de (meeste) wiskundigen zal worden bedacht is moeilijk van te voren uit te sluiten. Hoe groot de kansen van realisatie van een dergelijk project zijn kan ik niet beoordelen, want mijn kennis van het vakgebied logica en grondslagen van de wiskunde is zeer summier. Dat laatste hangt dan misschien weer samen met een intuïtief besef aan zo'n allesomvattende garantie van laatste zekerheid ook in de wiskunde niet echt behoefte te hebben. Ik kan heel goed leven met de gedachte dat wat in onze tijd als wiskundig juist wordt beschouwd in sommige opzichten een andere inhoud heeft dan in de tijd van Euclides en dat ook in de toekomst de inzichten over wat een aanvaardbare wiskundige redenering is mee zullen evolueren met de problemen zoals die dan zullen worden gesteld. Maar als dat zo is, dan ligt het interessante van een wiskundige stelling niet zozeer in het feit dat langs logische weg een bewijs is geleverd – wat natuurlijk wel zal moeten wil van een stelling sprake zijn – maar in het belang van de inhoud daarvan. Die inhoud betreft de wiskundige structuren, zoals die zich in de lange geschiedenis van het wetenschappelijk omgaan met de werkelijkheid als geldend hebben doen kennen. Wát een wiskundige structuur is, is uiteindelijk alleen maar aan te wijzen: ... kijk, er is geen grootste priemgetal – een structuureigenschap van de gehele getallen!

Is toegepaste wiskunde ook wiskunde?

Toepassingen van wiskunde spelen zich af in het interactiegebied van de wiskundige en, bijvoorbeeld, de economische structuren. Als interdisciplinaire

onderneming zijn ze dus niet *niet-wiskundig*, maar *half-wiskundig*, wat althans voor de meeste grote wiskundigen uit het verleden nog wiskundig genoeg was. Eerder dan het formuleren van stellingen zal de taak van de moderne wiskundige in interdisciplinair verband (al of niet in team met andere wetenschappers) het bouwen van een wiskundig model en de algoritmische uitwerking daarvan zijn. Een van de verworvenheden van onze tijd is de mogelijkheid opleidingen in de wiskunde te volgen die aan deze kant van de wiskunde in het geheel geen aandacht meer geven. Ik denk dat dat heel schadelijk is, voor de wiskunde zelf en voor haar beeldvorming naar buiten. Niet omdat dan het nut van de wiskunde (of iets dergelijks treurniswekkends) buiten beeld blijft, maar omdat daarmee wordt voorbijgegaan aan een essentie: *wiskunde als aspect van de werkelijkheid*. En essenties laten niet straffeloos aan zich voorbijgaan.

Verschillen tussen een wiskundige en een wiskundige

Wiskundigen van opleiding worden niet altijd wiskundigen van professie. De wiskunde heeft met de grote universitaire opleidingen als rechten en economie gemeen, dat haar afgestudeerden vaak in beroepen terecht komen waarin hun opleiding meer als algemene vaardigheid dan als specialisme functioneert. Hoe vaak dat het geval is weet niemand precies – we zullen wat dat betreft de resultaten van het onderzoek dat nu door het Wiskundig Genootschap is begonnen moeten afwachten. Ter bepaling van de gedachte zou mijn schatting zijn, dat 25% van de thans afstuderenden in de wiskunde hun vak als specialisme gaan beoefenen (als onderzoekers bij de universiteiten, de grote technologische instituten en de industrie, 5% als leraren), 50% de tijdens de opleiding verworven wiskundige vaardigheden in een niet-wiskundig gekwalificeerde omgeving uitoefent (in het bedrijfsleven inclusief de automatiseringssector) en 25% in algemene beleidvormende of beleidvoerende functies terecht komt, vaak in de overheidssector.
Voor de zichtbaarheid van het wiskundig beroep is dus van belang dat – als de schatting enigszins in de juiste buurt is – driekwart van de afgestudeerden maatschappelijk niet meer als wiskundige herkenbaar is. Ook professioneel hebben zij de kleur van hun omgeving aangenomen en spreken zij de taal van de hun omringende economen, elektrotechnici of stafmedewerkers. In die situatie heeft de aanwezigheid van een sterke professionele vereniging (zoals de eerder genoemde Amerikaanse Society for Industrial and Applied Mathematics) een goede invloed op de bouw van een wiskundig *esprit de corps*. In Nederland maakt de spreiding van een klein aantal wiskundigen over een veelheid van beroepen een dergelijk organisatorisch verband moeilijk, evenwel worden nu in het kader van het WG bescheiden eerste stappen gezet.

De mist rond de feitelijke gegevens omtrent de verdeling van de afgestudeerde wiskundigen over het beroepenspectrum heeft tot nu toe de opleidingsinstituten ontslagen van de verplichting, hun opleiding nog eens vanuit dat gezichtspunt te bezien. Immers, indien driekwart van de abituriënten terecht komt in een maatschappelijke functie die slechts zeer gedeeltelijk in het verlengde ligt van hun opleiding, dan ligt enige bezinning op dit punt op zijn minst voor de hand.
Allereerst, 'enige bezinning' is wat anders dan een obligate partij meezingen in de rituele koorzang over de noodzaak van een betere afstemming op de arbeidsmarkt, praktischer instelling en snellere inzetbaarheid van de universitaire afgestudeerden. Wiskunde is maatschappelijk gezien een diepte-investering en de meeste werkgevers zijn bereid een investering in wiskunde ook zo op te vatten. Vaak geven juist zij te kennen de wat grotere distantie zoals gegeven door het wiskundig gezichtspunt als een waardevol element te beschouwen. Maar toch, voor enige bezinning bestaat wel reden, met name bij de universitaire opleidingen.

Wiskunde aan een pragmatische universiteit

Het is een open deur intrappen te constateren, dat aan de Nederlandse universiteiten in de jaren zestig een ontwikkeling is ingezet die meestal met democratisering en massalisering wordt aangeduid. Echter: de massalisering is aan de wiskunde-instituten

voorbij gegaan en dat heeft ze de illusie gegeven, dat het met de democratisering ook wel mee zou vallen. Ik bedoel hier natuurlijk niet de democratisering in de zin van bereikbaarheid van de universiteit voor studenten van eenvoudige afkomst, want wat dat betreft heeft juist de wiskunde het nooit slecht gedaan. Inzet van deze ontwikkeling was de doorbreking van het traditionele universitaire ideaal van de (wetenschapelijke) elite, die zich op zijn maatschappelijke taak kon voorbereiden door zich enkele jaren in afzondering aan de studie van de zuivere, ongebonden wetenschap te wijden. Het is dit droombeeld – wonderwel passend bij een door veel wiskundigen aangehangen visie – dat in de afgelopen jaren vrij hardhandig werd vervangen door een simpele realiteit: voor de overgrote meerderheid van de studenten is de 'eerste fase' tevens de laatste. En die wensen zij zelf (zie het begin van deel 1) begrijpelijkerwijs allereerst als beroepsvoorbereiding te zien.

Het is deze ideologische reuzenzwaai, die de wiskunde-instituten niet hebben kunnen of willen meemaken, daarbij graag gesust door het zoet gefluister van de universitaire bestuurders die ter wille van de rust in de tent bij elke verandering verzekerden dat de oude universitaire waarden niet zouden worden aangetast. En door een overheid, die een tweede fase in het vooruitzicht stelde als reservaat voor de echte wetenschapsbeoefening, maar die niet wenste te realiseren.

Er is wat dit betreft natuurlijk enig verschil tussen de technische universiteiten, die tenslotte altijd wetenschappelijke opleidingen gericht op beroepsuitoefening hebben aangeboden, en de traditionele universiteiten, die de belangstelling voor hun enige beroepsgerichte sector, de lerarenopleiding, tot nul zagen dalen. Het is een verschil dat zich dan ook flagrant in de instroomcijfers aftekent.

Als docent aan een 'gewone' universiteit kom ik op dit punt onmiddellijk in het geweer en ga uitleggen dat hier sprake is van een onterechte beeldvorming. Tenslotte: ook de gewone universiteiten hebben inmiddels een sterke positie in de toegepaste wiskunde opgebouwd, in de plaats van de interactie met de technische disciplines bieden zij een zo mogelijk nog wijder spectrum van toepassing in de fysische, biologische, economische en sociale wetenschappen, en programmatisch loopt het aanbod in de opleidingen tot wiskundig ingenieur of doctorandus nauwelijks uiteen. Zoals gezegd, de beeldvorming is anders – maar ik wil best toegeven dat daartoe door sommige universitaire wiskunde-opleidingen wel enige aanleiding wordt gegeven.

Kan het beter?

Sommige commentaren uit de wandelgangen op de huidige impasse in de Nederlandse universitaire wiskunde munten uit door kortheid: het probleem is een verminderde belangstelling voor de zuivere wiskunde, dus is de oplossing: minder zuivere wiskunde. Het komt mij voor dat zowel de probleemstelling als de oplossing te wensen over laat. Een tekort aan studenten is niet hetzelfde als een teveel aan wiskunde en ik meen dat onder de huidige omstandigheden vooral van het eerste moet worden gesproken. Dit tekort wordt gemaskeerd door het in deel 2 besproken emulgatie-effect (wiskundigen zijn vervangbaar), en is overigens ook moeilijk hard te maken: hoe moet men kwaliteitsverlies door een te traag doordringen van nieuwe wiskundige ideeën in de maatschappij meten? Maar ook het toespelen van de zwarte piet aan de zuivere wiskunde lijkt wat al te gemakkelijk. Een overzicht van de leerstoelen wiskunde aan de Nederlandse universiteiten geeft niet de indruk van een sterke inhoudelijke onbalans tussen de zuivere en de toegepaste wiskunde. Bovendien: indien een zeer groot percentage van de wiskundigen een niet-wiskundig gekwalificeerde werkkring vindt, dan is aannemelijk dat zij daar worden aangesteld in hoofdzaak vanwege de tijdens hun opleiding verworven en gebleken algemene kwaliteiten. Het was dezelfde overweging die indertijd Napoleon voor zijn officieren een wiskunde-opleiding verplicht deed stellen. Het is moeilijk in te zien dat als onspecifiek maatschappelijk selectiemiddel de toegepaste wiskunde het op zichzelf zoveel beter doet dan de zuivere variant.

Dit wil echter niet zeggen dat bij de wiskunde-opleidingen niets zou moeten veranderen. Het wordt de hoogste tijd dat zij ernst maken met het gegeven dat door de overgrote meerderheid van de studenten de eerste fase als beroepsvoorbereiding wordt opgevat – meestal dus voor een niet-wiskundig beroep – en niet als voorbereiding voor de wiskundige onderzoekspecialismen. Nogmaals: dit betekent niet noodzakelijk minder zuivere wiskunde, want als het gehele relevante beroepenspectrum in aanmerking wordt genomen is er voor allerlei soorten wiskunde een plaats onder de zon. Wat dit wél betekent zal iedere opleiding op eigen wijze moeten uitwerken – ook die aan de technische universiteiten, want inderdaad, zo groot is ook in dit opzicht het verschil niet.
Hoewel ongevraagd advies zelden welkom is, wil ik na een zo uitvoerige beschouwing een visie op enkele wenselijke uitgangspunten niet achterwege laten: welnu, wat mij betreft zijn die de volgende.

– Een opbouw van de eerste-fase studieprogramma's vanuit een visie op de eenheid van de wiskunde, in plaats vanuit een vooruitgrijpen op de diversiteit van de onderzoekspecialismen.

– De integratie in elke wiskundig studieprogramma van een visie op de wiskunde als de toepassingsgebieden (mede) funderende structuurwetenschap. Dit is wat anders dan herinvoering van een klein bijvak natuurkunde of introductie van een college 'wiskundige modellen' van anecdotische aard.

– Een voorbereiding van de student op het feit, dat zij (hij) later, in al dan niet wiskundige beroepskring, in ieder geval met die omgeving moet communiceren. Enige training in communicatieve vaardigheden – altijd een belangrijk element in de vroeger aan vrijwel elke wiskundestudent gegeven voorbereiding tot het beroep van leraar – kost relatief weinig tijd en zal de geloofwaardigheid van de opleiding qua beroepsvoorbereiding niet onaanzienlijk versterken.

– Een herstel van de inhoudelijke communicatie tussen de schoolwiskunde en de universitaire wiskunde – zoals bepleit in Euclides, november 1990.

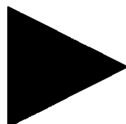
Een self-fulfilling prophecy?

Wiskunde is geweldig, maar met het beroep van wiskundige wil het nog niet echt lukken. Ook dit artikel zal daaraan weinig kunnen veranderen. Het wilde slechts de vinger leggen op een aantal factoren in ons wiskundig bedrijf, die van dat *niet lukken* de gemakkelijkste vorm van gelijk krijgen, een *self-fulfilling prophecy* maken. Het doorbreken van zo'n magische cirkel is verre van gemakkelijk en vereist altijd een gecoördineerde aanpak vanuit verschillende strategische punten. Een ding is duidelijk: een van die strategische punten is het schoollokaal – vandaar dit stuk.

De volgende personen ben ik dankbaar voor hun bijdragen in de vorm van informatie, discussie of kritiek: P. C. Baayen, H. J. Boersma, W. E. Groen, T. Koetsier, J. Oosterhoff en G. Somsen. Geen van hen was het met alles eens.

Noten

1. Delen 1 en 2 in Euclides, jrg. 67, nr. 2 en 3, 1991.
2. In populaire uiteenzettingen valt meestal de nadruk op de historische rol van wiskunde bij het ophelderen van de fijnstructuur van de fysische werkelijkheid. De betekenis van wiskunde als middel ter beheersing van de vele manifestaties van complexiteit in de moderne wereld zou meer aandacht verdienen.



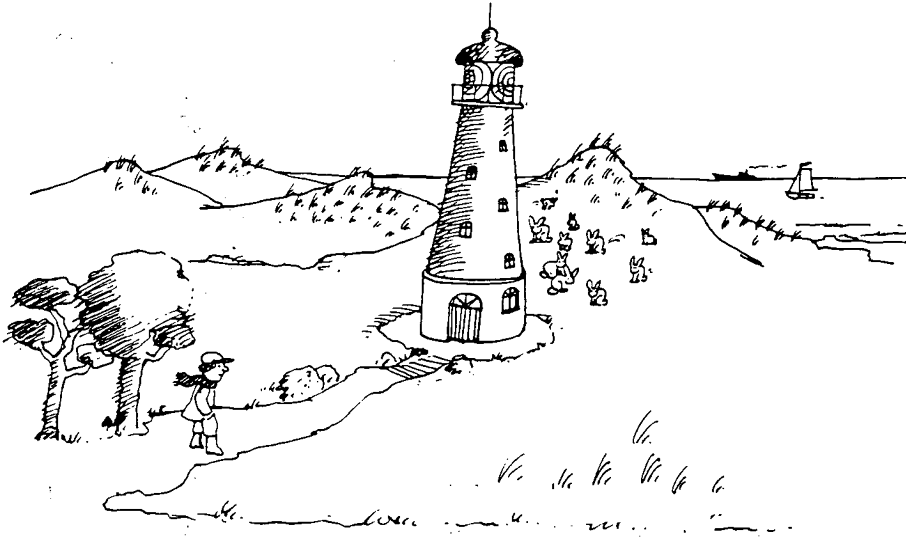
Mededeling

Rectificatie

In Euclides 67-2 is op blz. 50 helaas iets weggevallen. Onderaan de eerste kolom moet staan:

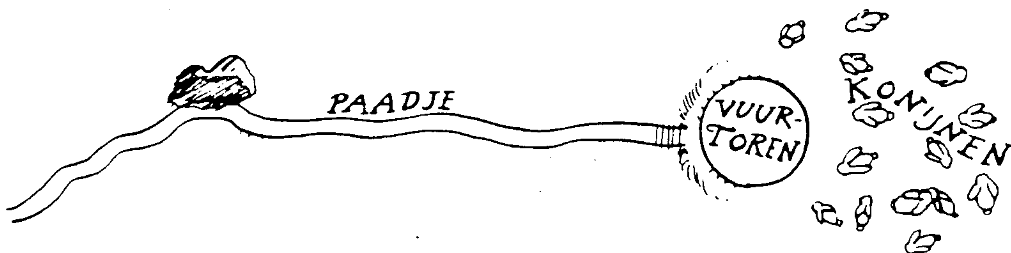
.....in. Dat is echter *beslist niet*

► Ik zie ze niet meer zitten



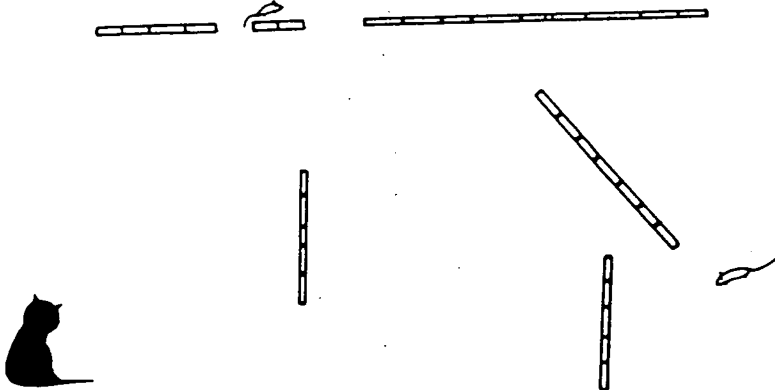
De vuurtorenwachter van het eiland Gorf loopt naar de vuurtoren. Achter de toren spelen de konijnen in het gras. Ze lopen niet meer weg voor de vuurtorenwachter.
Thuis vertelt de vuurtorenwachter aan zijn kinderen: 'Als ik naar de toren loop, kom ik steeds dichter bij de konijnen. Ze lopen niet weg, maar toch zie ik er steeds minder. Hoe kan dat?'

Leg dat uit met deze tekening.

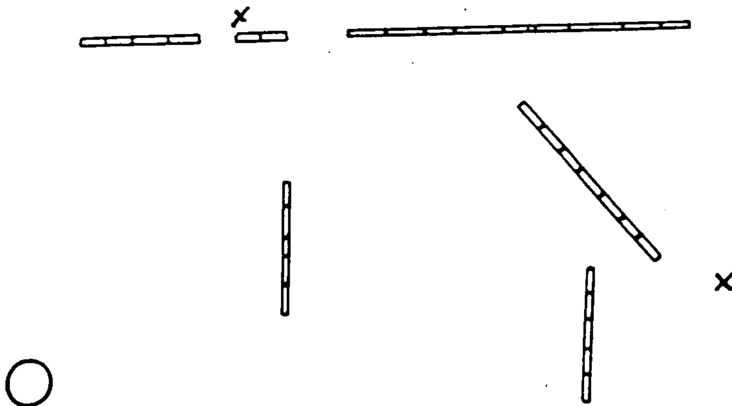


● Werkblad ●

▶ Kat en muis



Hierboven zie je in een bovenaanzicht wat muurtjes van een ruïne. De kat zit op de loer. Kleur met potlood de stukken grond waar de muizen zich beter niet kunnen vertonen.



Hierboven zie je in een bovenaanzicht wat muurtjes van een ruïne. De kat (voorgesteld door een cirkeltje) zit op de loer. Kleur met potlood de stukken grond waar de muizen (voorgesteld door een 'x') zich beter niet kunnen vertonen.

● Serie ● ● ● ●

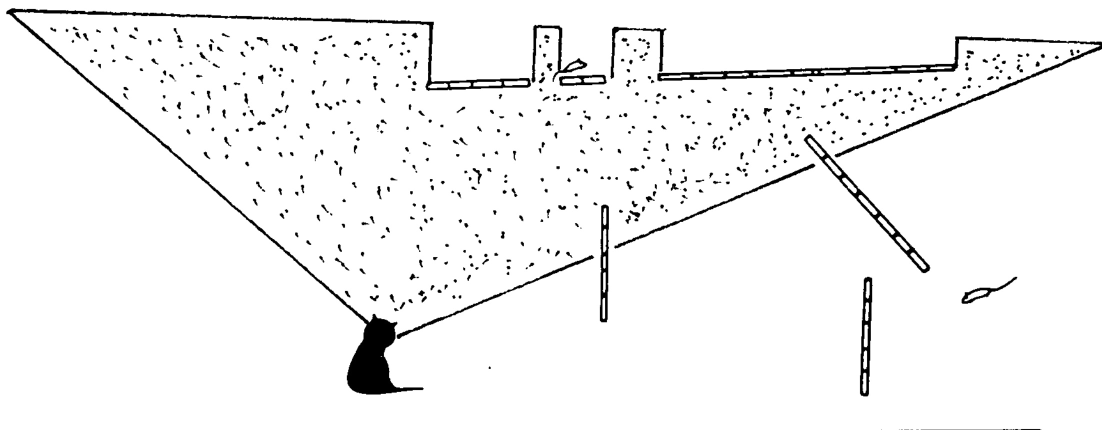
Wiskunde 12-16 (experimenteel)

▶ Goed gezien, hoe gedacht?

Pieter Willems

Scholengemeenschap 'Sancta Maria' te Deurne (NB) is experimenteerschool voor het project W12-16. Er is in klas 1 o.a. gewerkt met het pakketje 'Goed gezien', waaruit een pagina te zien is op het eerste werkblad. De resultaten van de eindtoets hierover en vooral van de opdracht over 'kijklijnen' (zie werkblad 2) waren heel verrassend!
Als voorbeeld de oplossing van Marie, zie tekening.
Marie tekent de gezichtshoek van de kat. Binnen dit gebied mag de muis niet komen. De kat houdt zijn kop stil. Marie heeft goed aan de gezichtshoek, maar niet overal aan het effect van de muurtjes gedacht. Bij de gaten tussen de muren kan de kat erin kijken.
Leerlingen blijken toch haast altijd een voor hen logische gedachtengang te hebben ontwikkeld. Daar kom je echter pas achter als je met de leerlingen praat. Contexten roepen allerlei verschillende associaties op.
Wij gingen er van uit dat een kat die op de loer zit goed om zich heen kijkt en zo een heel gebied bestrijkt. Sommige leerlingen lieten de kat lopen terwijl anderen eigenlijk alleen de gezichtshoek tekenden.
Veel leerlingen trokken zich niets aan van de muurtjes terwijl zij wel weten dat de kat niet door een muurtje heen kan kijken.
Zoals de muurtjes in de opgaven staan roepen ze bij sommige leerlingen niet het idee van een barrière op. Dat bedoelden wij wel. Misschien is de weergave van de situatie ook wat ongelukkig gekozen. Van de muurtjes geven we een plattegrond, bovenaanzicht, maar van de kat en de muizen zijn de zijaanzichten weergegeven. De kat zit eigenlijk toch heel vreemd op zo'n plattegrond!

Voor ons is de combinatie bovenaanzicht-zijaanzicht goed te maken. Voor leerlingen blijkt dit dan toch een blokkade te zijn. Een oplossing zou in dit geval misschien kunnen zijn om de kat door een cirkeltje voor te stellen en de muizen door een 'kruisje'.



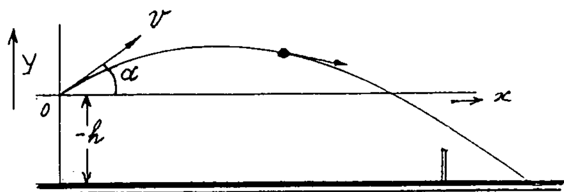
● Bijdrage ● ● ● ●

► De service

Henk Mulder

Bij volleybal is de sprongservice gebruikelijk. Ook bij tennis probeert de speler van zo hoog mogelijk en hard te serveren om het de tegenstander moeilijk te maken. Die moet dan immers uiterst snel reageren, bovendien is een snelle bal moeilijk terug te slaan.
Bij zo'n service zijn wel twee voorwaarden: de bal moet over het net en binnen de achterlijn blijven. We doen alsof precies in de lengterichting van het veld geserveerd wordt (iets wat bij tennissen zelfs niet mag!). We zullen proberen beide aspecten in kaart te brengen. Het zal blijken dat het maar om een smal gebied van vrijheid gaat.
Er zijn hier drie variabelen in het spel: hoe groot zijn op het moment van de opslag
de hoogte (h),
de hoek (α) en
de snelheid (v).

Zie figuur 1.



Figuur 1

De werpkromme

De baan voor een geworpen of geslagen bal is een deel van een parabool. We kiezen de oorsprong in het startpunt, zoals in figuur 1 aangegeven. Gemakkelijk is af te leiden:

$$y = (\tan\alpha)\,x - \frac{g(1+\tan^2\alpha)}{2v^2}\,x^2 \qquad (1)$$

We passen deze relatie toe op de opslag van een tennisbal. Een speler staat hierbij 12 m van het net en moet de bal over een 1 m hoog net, binnen 7 m in het vak van de tegenspeler deponeren.

Rakelings over het net, precies op de achterlijn

We gaan eens bekijken hoe een speler dat klaar krijgt. Er is kennelijk bij een zekere opslaghoogte een relatie tussen α en v. Stel $g = 10\,\text{m/s}^2$.
We gaan uit van een opslag van 2,5 m hoogte. Bij het passeren van het net mag de bal dus inmiddels 1,5 m gedaald zijn. We kunnen dus stellen: de parabool gaat door de punten $(12, -1\frac{1}{2})$ en $(19, -2\frac{1}{2})$.
Uit het stelsel vergelijkingen:

$$-1{,}5 = 12\tan\alpha - \frac{1440(1+\tan^2\alpha)}{2v^2} \qquad (2)$$

$$-2{,}5 = 19\tan\alpha - \frac{3610(1+\tan^2\alpha)}{2v^2} \qquad (3)$$

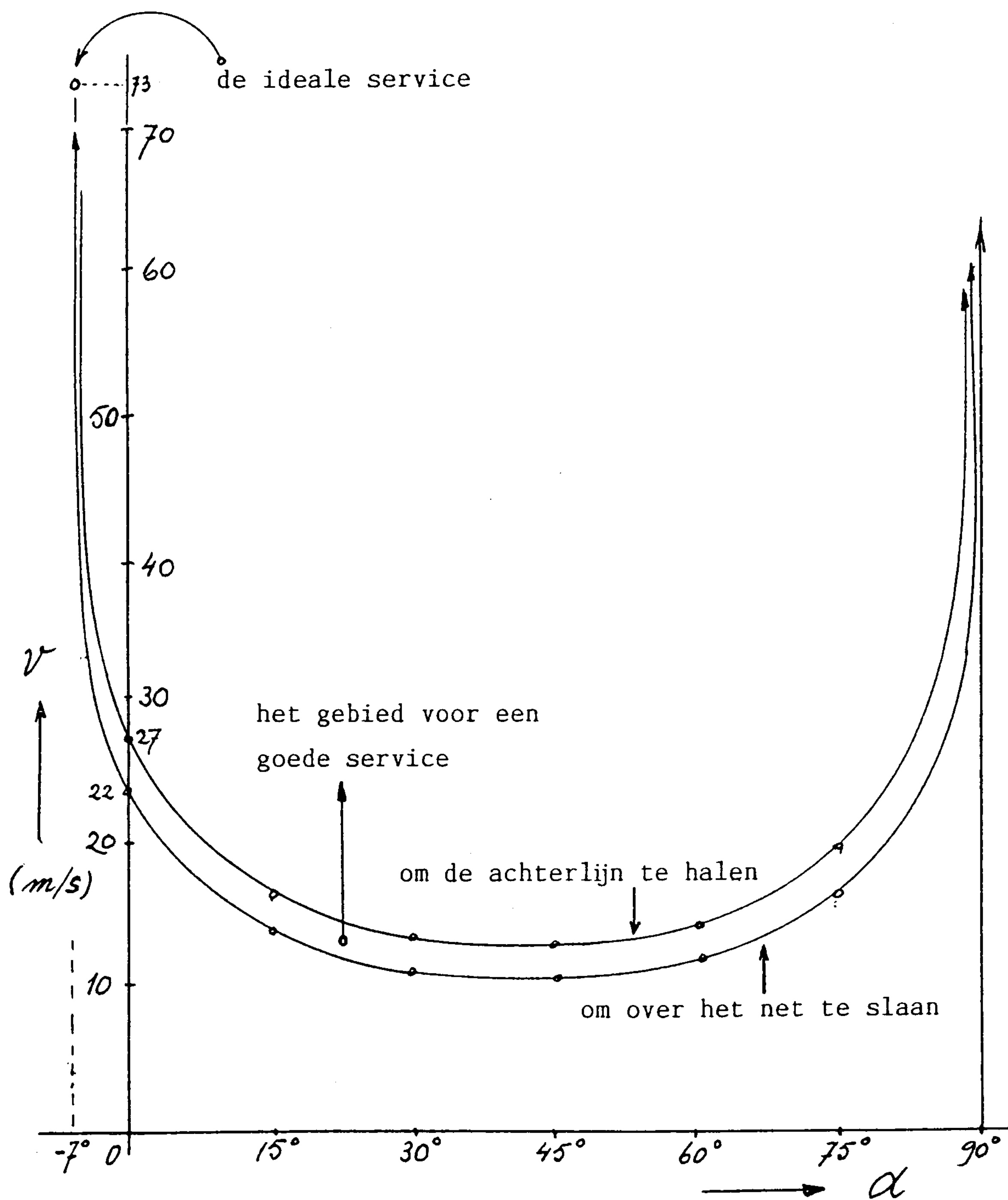
zijn $\tan\alpha$ en v op te lossen.

Wij vinden: $\tan\alpha = -0{,}11$ of $\alpha = -6{,}5°$ (zie fig. 2) en $v = 73$ m/s (of 264 km/h!).

De tijd voor de totale baan volgt uit de vergelijking:

$$t = \frac{1}{g}\left(v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2hg}\right) \qquad (4)$$

Bij $g = 10\,\text{m/s}^2$ geeft dit als uitkomst 0,26 (of $\frac{1}{4}$ seconde!). Dat vraagt dus van de tegenspeler wel uiterste concentratie en een zeer snel reactievermogen.


de ideale service
73
70
60
50
40
30
27
22
20
10
v
(m/s)
het gebied voor een
goede service
om de achterlijn te halen
om over het net te slaan
-7°
0
15°
30°
45°
60°
75°
90°
α

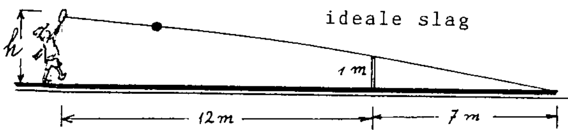
Figuur 3

Steeds hoger

Bij krachtiger slagen moet van grotere hoogte geserveerd worden. Er wordt een limiet bereikt als de baan van de bal vrijwel recht is (fig. 2). Dat gebeurt bij theoretisch oneindig hoge snelheid.
Uit twee gelijkvormige driehoeken (zie fig. 2) volgt de theoretische slaghoogte. We lezen af:

$$h : 19 = 1 : 7 \text{ of } h = 2{,}7 \text{ m}. \qquad (5)$$

De bal moet dan wel neergeslagen worden onder een hoek volgend uit $\tan \alpha = -\frac{2{,}5}{19}$ of $\alpha = -7{,}5°$.



Figuur 2

Juist over het net

We zoeken de relatie tussen α en v, bij een opslaghoogte van 2,5 m, om juist over het net te slaan. Bij $x = 12$ hoort dus $y = -1{,}5$.
Uit (2) is nu gemakkelijk af te leiden:

$$v^2 = \frac{720(1 + \tan^2 \alpha)}{1{,}5 + 12 \tan \alpha} \qquad (6)$$

Bij $\alpha = 0°$ (horizontale slag) hoort $v = 22$ m/s.
In figuur 3 verbeeldt de onderste kromme de juist-over-het-net-grafiek. Het minimum ligt bij $\alpha = 41°$ en $v = 10{,}3$ m/s. Dit is dan de laagste snelheid om nog over het net te komen.
Door meer waarden voor α en $\tan \alpha$ in (6) in te vullen, vinden we meer punten voor de juist-over-het-net-grafiek.

Juist op de achterlijn

We tekenen nog een tweede grafiek. Welke relatie is er tussen α en v om de bal juist op de achterlijn te krijgen?

Uit (3) volgt: $$v^2 = \frac{1805(1 + \tan^2 \alpha)}{2{,}5 + 19 \tan \alpha} \qquad (7)$$

Door combinaties voor α en v te zoeken vinden we punten voor de grafiek.

De ideale service

Als we uit (6) en (7) α en v combineren, vinden we het snijpunt van beide grafieken. We komen weer uit op $\alpha = -6{,}5°$ en $v = 73$ m/s.
Het zal duidelijk zijn dat beide grafieken een asymptoot hebben bij $\alpha = 90°$.
Verder heeft de eerstgenoemde grafiek een asymptoot waar $\tan \alpha = -\frac{1{,}5}{12}$ ($\alpha = -7{,}1°$) en de tweede grafiek waar $\tan \alpha = -\frac{2{,}5}{19}$ ($\alpha = -7{,}5°$).
Dit laatste geeft juist de situatie waarin de baan volkomen recht is!

Mededeling

Prof. dr. O. Bottema 90 jaar

Op eerste Kerstdag 1991 hoopt Prof. dr. O. Bottema, erelid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, zijn negentigste verjaardag te vieren.
De redactie wenst hem van harte geluk met zijn verjaardag.

Ter ere van Prof. Bottema zijn in de rubriek '40 jaar geleden' in de nummers 3 en 5 van de lopende jaargang citaten uit bijdragen van zijn hand opgenomen.

De redactie

▶ In meisjesgroepen kunnen meisjes de ruimte gebruiken

Ton van Alten, Francis Meester

Inleiding

Over de coëducatie, het gemengde onderwijs aan jongens en meisjes, is de laatste jaren in diverse tijdschriften heel wat geschreven.
Onderzoeken in Engeland, later in Noord-Amerika en eind jaren tachtig in West-Duitsland deden de discussies oplaaien over voor- en nadelen van meisjesscholen of aparte meisjesgroepen versus gemengd onderwijs. In Nederlandse wiskundetijdschriften is nog niet zoveel aandacht besteed aan deze problematiek. Dit was in oktober '89 wel het geval op de Studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, waar in de talkshow het onderwerp 'meisjesgroepen bij de exacte vakken' aan de orde kwam. Ook daar bleek hoe verdeeld de meningen hierover zijn; van de zes forumleden waren er drie tegen het vormen van aparte meisjesgroepen en drie wilden er wel, voor een bepaalde periode, en een beperkt aantal vakken, het voordeel van de twijfel aan geven.
In dit artikel passeren de verschillende standpunten, toegesneden op wiskunde, de revue en nemen wij hierover zelf een standpunt in. Wij vinden het belangrijk de discussie onder ieders aandacht te brengen opdat deze in scholen en wiskundevakgroepen gevoerd kan worden. Daarbij maken we dankbaar gebruik van het artikel 'Terug naar de meisjesschool?' dat Cisca Dresselhuys schreef voor Jeugd en Samenleving[1].
De discussies in de Nederlandse pers kwamen op gang door:

- het boekje Vrouwiskundig[2],
- de artikelen in het feministisch tijdschrift Opzij van okt. '89[3] en maart '90[4],
- een forumdiscussie t.g.v. internationale vrouwendag op 8 maart '90 met o.a. minister Ritzen,
- het 75-jarig bestaan van Fons Vitae- voorheen het 'R.K. Lyceum voor meisjes'
- het in augusutus '89 gestarte project 'Coornhert Exact'[5],
- het in 1986 verschenen boekje 'Hoe apart zijn meisjes? Meisjes apart voor de exacte vakken', van Ingrid Kluvers en Vera Goedhart[6] waarin interviews zijn opgenomen met mensen die in de praktijk met meisjes en de exacte vakken te maken hebben, evenals een onderzoeksverslag van meisjesgroepen in Engeland.

Een schoolvoorbeeld

Het verschijnen van genoemde literatuur en de discussies rond de campagne Kies Exact en later die van de 1990-maatregel zijn belangrijke stimulansen geweest voor de schoolleiding en de mensen van de wiskunde- en natuurkundesekties van het Coornhertlyceum te Haarlem om een project 'Coornhert Exact' op te zetten. Het Coornhert was niet tevreden met het keuzepatroon van hun leerlingen en de bereikte studieresultaten in de exacte vakken. Het resulteerde in een breed opgezet project waarin gekozen werd om de vakken wiskunde en natuurkunde veel concreter aan te bieden, een andere werkvorm met veel zelf werken te gaan hanteren, een andere keuzebegeleiding op te zetten, kennismaken met techniek via projecten en 'doe-dagen', voorlichting aan ouders en tevens het werken in gescheiden jongens- en meisjesgroepen in de derde klassen voor de vakken wiskunde en natuurkunde. Het gescheiden lesgeven aan jongens en meisjes is één van de aspecten van dit brede project. In de publiciteit heeft dit punt verreweg de meeste aandacht gekre-

gen. Blijkbaar is dit een hot item voor de discussie; de meningen zijn verdeeld en dit is een aardig onderwerp om deze meningen scherp tegenover elkaar te zetten. Dat de discussie over meisjes- en jongengroepen enorm veel emoties opwekt blijkt onder andere uit de titel van het artikel in Opzij: 'Terug naar de nonnenschool?' en enkele ingezonden brieven daarna. Wat zijn nu al die meningen en waar gaat het om?

Veranderingen

Eind jaren zestig verdwijnen in snelle vaart op één[7] na alle meisjes- en jongensscholen uit het Nederlandse onderwijs. Tot die tijd kenden meisjes in vergelijking tot jongens nog een grote achterstand in hun opleiding: een geringer aantal meisjes dan jongens ging naar de middelbare school, laat staan naar een hogere beroepsopleiding of een universiteit. Coëducatie was toen speerpunt van beleid, hiermee zou een einde gemaakt kunnen worden aan de ongelijkheid. Met de invoering van de Mammoetwet werd de MMS, het echt specifieke meisjesonderwijs, opgeheven en was er formeel gelijkheid in aanbod voor jongens en meisjes in de keuze van het schooltype. In andere landen zag men dezelfde beweging, alleen bleven daar meer meisjesscholen bestaan. Sinds die tijd hebben meisjes inderdaad hun achterstand ingelopen, tenminste als we kijken naar aantallen jongens en meisjes die het voortgezet, hoger en universitair onderwijs volgen.
Dat de schooltypes lto en lhno in de prakijk bijna sexe-gescheiden scholen zijn laten we hier buiten beschouwing; een enkel meisje bezoekt het lto en een enkele jongen het lhno.

Verschillen

Er is evenwel een nieuw probleem duidelijk geworden: meisjes hebben een sexe-specifieke schoolloopbaan; ze kiezen de exacte vakken beduidend minder vaak dan jongens doen. Het vakkenpakket, gekozen op 14-15-jarige leeftijd is één van de oorzaken van het niet kunnen volgen van een exacte vervolgopleiding. Meisjes zijn oververtegenwoordigd in studierichtingen die op het ogenblik automatisch tot werkloosheid lijken te leiden (talen) en ondervertegenwoordigd in de exacte studierichtingen (informatica) die betere carrièrekansen bieden. In de jaren tachtig blijkt dat *het gelijk voor meisjes in de coëducatie niet het gewenste gelijk is.* De praktijk van de coëducatie levert voor meisjes een praktisch ongelijk op.

De vakken wiskunde A en wiskunde B in de bovenbouw van havo en vwo hebben weliswaar tot gevolg dat er minder leerlingen zonder wiskunde het einddiploma halen, maar ook kunnen minder leerlingen een exacte kant op. Immers in '86 koos 61% van de meisjes wiskunde I met daarbij de toekomst voor een exacte richting open, tegen in '89 30% van de meisjes wiskunde B, welk vak noodzakelijk is voor een exact vervolg. De eerste gegevens van het havo, evenals de invulling van het programma, zijn nog minder bemoedigend. Het Hawex-programma is immers gemaakt voor een betere aansluiting met het hoger beroepsondewijs i.h.b. wiskunde B voor de HTS, een schooltype dat voor 95% bevolkt wordt door mannen.

De praktijk in de klas

Veel wiskundedocenten zullen het volgende patroon wel herkennen: een leerling die een aardige start maakt in de brugklas zakt eind tweede jaar, begin derde jaar met wiskunde terug met de prestaties. Het lijkt de leerlinge (immers dikwijls zijn dit meisjes) minder te interesseren, het enthousiasme van het begin is weg. Bij het praten over de pakketkeuze heeft ze zich al behoorijk voorbereid om geen wiskunde te kiezen, laat staan wiskunde B. Een stimulerende docent kan in zo'n jaar wonderen verrichten!
Uit allerlei onderzoeken in Engeland, de Verenigde Staten en recent in Europa en in Nederland[8] blijkt dat bij een gelijke verdeling jongens ongeveer tweemaal zoveel aandacht krijgen in de les als meisjes. Het blijkt dat docenten aan jongens andere vragen stellen dan aan meisjes. Jongens krijgen gemiddeld meer denkvragen plus voldoende tijd om over het antwoord na te denken, meisjes krijgen hoofdzakelijk reproductievragen en een korte bedenktijd. Bij

dezelfde cijferresultaten krijgen jongens vaker een positief advies om wiskunde in hun pakket op te nemen dan meisjes. Wanneer de leerlingen initiatief nemen dan blijken de jongens dit twee keer zo vaak te doen als de meisjes. Een leerstijl met veel open vragen aan de groep bevordert de ongelijke deelname van jongens en van meisjes aan het klassegebeuren. Wanneer je een les bijwoont zie je zo vaak gebeuren dat een meisjes reageert op een vraag van een docent door haar vinger op te steken en dat een jongen reageert door het antwoord door de klas te roepen.
Uit onderzoek blijkt ook dat docenten brutaal en agressief gedrag bij jongens minder erg vinden dan bij meisjes. Dat werd vaak uitgelegd als: hij is alert of hij laat zich het kaas niet van het brood eten. Eigenlijk lijken docenten nogal gecharmeerd te zijn van dit soort aandachtvragende jongens; zij herinneren zich achteraf tenminste altijd nog de namen van deze leerlingen. Meisjes die een zelfde soort gedrag vertonen scoren uitermate laag op de populariteitsladder. Zij zijn vaak de meest gehate groep leerlingen; het vervelende van dit alles is dat docenten zich niet bewust zijn van deze oneerlijk verdeelde aandacht. Uit verschillende artikelen klinkt dan ook door: gemengd onderwijs maakt meisjes dom en bevoordeelt jongens.

De antropologe Mieke de Waal licht in haar proefschrift[9] één en ander toe. Zij verbleef een tijdlang in een groep meisjes en schreef op grond van haar bevindingen de studie *Meisjes een wereld apart.* Zij maakt melding van de volgende ontwikkeling: Meisjes presteren in het begin van hun voortgezet opleiding vaak even goed of zelfs beter dan jongens, maar dit verandert in de puberteit als ze 14, 15 jaar zijn. Op die leeftijd worden andere zaken belangrijk(er) voor hen, zoals de onderlinge vriendschappen met andere meisjes en de verhouding tot jongens. Uit onzekerheid over hun rol nemen ze op die leeftijd het zekere voor het onzekere: zij kiezen voor de stereotiepe vrouwelijkheid, omdat die hen meer voordelen lijkt te bieden, vooral in de omgang met jongens en omdat deze in hun dagelijkse omgeving het meest voorkomt en het best geaccepteerd wordt. Bovenstaande is samen te vatten met 'oefenen in traditioneel vrouwelijke waarde'.
Meisjes op de leeftijd van 14, 15 jaar hebben een terugval in hun wiskundeprestaties. De reden is een cumulatie van factoren: het minder ruimte krijgen in de gemengde klas en het zelf aandacht nodig hebben voor het proces van oefenen in vrouw-zijn heeft vooral bij de exacte vakken een negatief effect. De traditionele invulling van beelden van exacte vakken en vrouwelijkheid liggen immers nogal ver uit elkaar. Als meisje moet je wel sterk in je schoenen staan om daar nieuwe beelden van te ontwikkelen en die te kunnen integreren. Juist daarom hebben meisjes ook de steun van hun omgeving nodig, maar moeten die vaak ontberen. Een meisje moet vaak meer op eigen kracht wiskunde B kiezen dan een jongen, op grond van de geschetste beelden is dat voor haar juist moeilijker om te doen.

Een buurvrouw met twee dochters en één zoon in het voortgezet onderwijs heeft ook diverse stukjes in tijdschriften en kranten gelezen. Zij was geshockeerd dat haar dochters systematisch in het onderwijs veel minder aandacht zouden krijgen dan haar zoon. Weten docenten dat de interactie zo scheef verdeeld is in een les? Wat doen docenten eraan? Wat doen jullie binnen de wiskundewereld daaraan? Ik vertel haar van de Werkgroep Vrouwen & Wiskunde, van het project Wiskunde & Emancipatie waarin we o.a. voor opleiding en nascholing van wiskundedocenten materialen maken. Ik merk op dat bewustworden nog lang niet voldoende is om het feitelijk gedrag te veranderen. Ingebakken patronen zijn heel moeilijk veranderbaar; vanuit een vaste overtuiging dat zaken niet kloppen en dan een systematisch werken aan het gedrag en het reageren kan geleidelijk aan veranderingen geven. We moeten proberen alert te worden op patronen die ten nadele van een groep leerlingen werken. Het vraagt bewustwording en nieuwe vaardigheden.

Meisjesscholen

Eerst herinneringen van de schrijvers.
Op de eerste bijeenkomst van Vrouwen & Wiskunde in nov. '81 waren er opvallend veel vrouwen die

hun middelbare schooltijd doorgebracht hadden op een meisjesschool. Dat viel op, maar werd ook onmiddellijk gerelativeerd door het gegeven dat het volgen van HBS of Gymnasium in die tijd nog lang geen algemeen goed was voor grote groepen leerlingen. Daarbij is het volgende gegeven markant. De ene auteur van dit artikel volgde HBS-B op een meisjeslyceum en zat met 17 andere meisjes in het eindexamenjaar, de andere in een gemengde HBS-B klas met twee meisjes die vooral tijdens de lessen stereometrie graag in de buurt van de auteur waren. Een nichtje van één van hen zat op een gemengde HBS, zij volgde met één ander meisje de lessen in de B-klas. Toeval?

Dit vermoeden onderzochten twee Westduitse pedagogen[10] Maria Anna Kreienbaum en Jacqueline Kauermann-Walter. Zij stelden vast:

– aan de universiteit van Dortmund heeft 36% van alle meisjesstudenten in de studierichting chemie en informatica een diploma van een meisjesschool, terwijl dit schooltype slechts voor 5% in de streek voorkomt
– aan de technische universiteit van Aken bedroeg het percentage informaticastudentes zelfs 61%

en concludeerden: meisjesonderwijs stimuleert vrouwen ook te kiezen voor traditioneel mannelijke vakken.

In de forumdiscussie van 8 maart '90 blijkt de Groningse wetenschapster Mineke van Essen, auteur van een studie over tweehonderd jaar meisjesonderwijs[11] een felle tegenstandster te zijn van herinvoering van aparte meisjesscholen. Haar tegenargumenten zijn:
– het inzetten van het verschil als middel voor het bewerken van gelijkheid is een controverse.
– aparte meisjesscholen of meisjesgroepen zullen als inferieur worden beschouwd.
– het onschuldig lijkende middel om binnen een gemengde school meisjesgroepen voor bepaalde vakken te maken, kan op termijn een sneeuwbaleffect veroorzaken. Als meisjes een andere aanpak nodig hebben, verschillen zij dan ook niet in andere opzichten van jongens en mannen? Hebben zij voor het ene vak niet meer aanleg dan voor het andere, zou men kunnen gaan denken. Zijn zij niet geschikter voor het verzorgen dan voor het produceren? Horen zij niet meer thuis dan in de harde buitenwereld?
Het gevaar dreigt dan dat de rolverdeling waar we net een beetje vanaf raken, maar die bij lange na nog niet uit de wereld is, weer in het vizier verschijnt; het middel wordt dan erger dan de kwaal.

Meisjesgroepen

In Nederland klinkt niet opnieuw de roep naar echte meisjesscholen. De verworvenheden van de coëducatie staan gelukkig hoog in het vaandel; het starten van een feministische meisjesschool is ook niet aan de orde. Wel wordt gedacht aan, en in de praktijk gebracht op het Coornhertlyceum, aan meisjesgroepen voor een enkel vak en voor een afgeperkte periode apart les te geven.

Mieke de Waal voorzag dat er nogal wat mensen zouden schrikken van haar bevindingen en zij waarschuwt voor paniekreacties naar meisjes. 'Ik ben bang, dat mensen die mijn proefschrift lezen zullen zeggen: 'We moeten die meisjes zien te veranderen'. Dat zou een verkeerde conclusie zijn. Meisjes tussen 12 en 16 zijn onzeker en op zoek naar de veiligste plaats, het best gebaande pad. Als je iets wilt veranderen moet je hun omgeving veranderen'. Het is dan ook niet vreemd dat er in de *organisatie* oplossingen worden voorgesteld. Voor een beperkte periode, die gedurende de keuzebegeleiding, voor een beperkt aantal vakken, de exacte vakken, kan er besloten worden om aparte jongens- en meisjesgroepen te maken. En dan hebben we het over hetzelfde leerplan met gelijke toetsing en met eenzelfde groep docenten. Het reële gevaar dat Mineke van Essen signaleert is dunkt ons dan tot een minimum te beperken. Wanneer er met een meisjesgroep gewerkt wordt zullen we merken dat het hele scala van reageren, zoals we dat binnen een gemengde groep kennen, zich ook voordoet in een groep meisjes; enkelen hebben de leiding, er zijn er die door de klas roepen zonder hun hand op te steken, er zijn er die je nooit hoort tenzij je die expliciet een vraag stelt, er zijn er die heel slordig werken, er zijn er die het leuk vinden om voor wiskunde het

hoogste cijfer van de klas te halen, er zijn meisjes die alle problemen kunnen kraken en het leuk vinden etc. Het bijzondere is nu dat je in een gemengde groep niet al die patronen bij meisjes ziet en ook dat ze niet geaccepteerd worden van meisjes in een gemengde groep. Dat betekent dat leerlingen zich in een gemengde groep inhouden of zich wellicht overtillen. Geen gezonde situatie dunkt ons. De eerste ervaringen van de docenten van het Coornhertlyceum zijn dat er veel meer gepraat wordt in de meisjesgroep, veelal over wiskunde, en dat er erg hard gewerkt wordt.

Wanneer er gekozen wordt voor deze organisatorische oplossing dan gelden voor ons de volgende strikte voorwaarden:
* voor enkele vakken
* tijdelijk
* geen leerplanverschillen
* met gelijke beoordeling

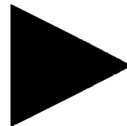
Wanneer er gekozen wordt voor het werken met aparte jongens- en meisjesgroepen dan ligt het voor de hand om het uit te voeren op de meest kwetsbare leeftijd van meisjes, dus als ze 14, 15 jaar zijn. Het jaar dat het vakkenpakket gekozen gaat worden of het jaar daar aan voorafgaand komen het meest in aanmerking.

Eigenlijk zeggen we: *geef meisjes in een kwetsbare-periode de ruimte waar ze recht op hebben.*

Onder de genoemde strikte voorwaarden hoeven we niet bang te zijn 'terug naar de meisjesschool' te gaan. Het is een paradox; ongelijk inzetten voor meisjes om meer gelijk te bereiken. Wij vinden dat beter dan formeel gelijk inzetten en praktisch ongelijk bereiken.

Noten

1. Dresselhuys, C. september 1990, *Terug naar de meisjesschool?* artikel in Jeugd en Samenleving 20e jaargang, Amersfoort.
2. Meeder, M. en F. Meester 1984, *VrouWiskundig*, Vrouwen & Wiskunde, Utrecht.
3. Dresselhuys, C. oktober 1989, *Van die dingen dus...*, Redactioneel commentaar in Opzij.
4. Straathof, M. maart 1990, *Terug naar de nonnenschool?* Artikel in Opzij jaargang nummer 3.
5. Sanders, M. en M. Wijers, 1990, Jaarverslag Project Coornhert Exact, Haarlem.
6. Kluvers, I en V. Goedhart, 1986, *Meisjes apart voor exacte vakken? Hoe apart zijn Meisjes?* publicaties van Ministerie van O & W, D.O.P. 's Gravenhage.
7. Ubels, R. maart 1990, *Johanna Westermanschool geeft alleen meisjes een kans*, Nederlands Dagblad.
8. Sterringa, B., C. Petit en W. Schakenraad 199, *Wie neemt het initiatief?* I.M.V. Katholieke Universiteit Nijmegen.
9. De Waal, M. 1989, *Meisjes een wereld apart*, Amsterdam.
10. Rauch, J. 1989, *K.O. education*, Maandblad Emma.
11. van Essen, M. 1990, *Opvoeden met een dubbel doel, twee eeuwen meisjesonderwijs in Nederland*, SUA, Amsterdam.



Mededeling

Wintersymposium

Op zaterdag 4 januari 1992 organiseert het Wiskundig Genootschap haar Wintersymposium onder de titel 'Wiskunde ontwikkelt'. Een drietal sprekers zal ingaan op ontwikkelingen van de wiskunde in de afgelopen twintig jaar.
Het programma luidt als volgt:

9.30-10.00 Ontvangst met koffie.

10.00-11.00 dr. H. te Riele
Factoriseren in de afgelopen 15 jaar: evolutie of revolutie.

11.15-12.15 prof. dr. D. Siersma
Knopen en vlechten oud en nieuw.

12.15-13.30 pauze, waarin men kan deelnemen aan een gezamenlijke lunch.

13.30-14.45 prof. dr. P. Hogeweg
Experimentele wiskunde versus theoretische biologie.
Patroonvorming door lokale interacties.

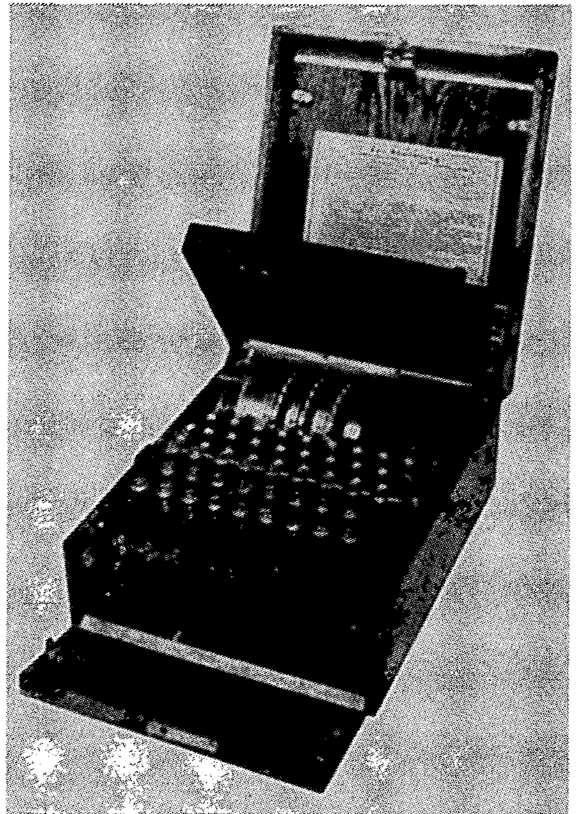
Het symposium wordt gehouden in het Johan van Oldenbarneveldt Gymnasium, Groen van Prinstererlaan 33 in Amersfoort.
Deelname aan het symposium is gratis.
Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch moet *f* 15,– overmaken op gironummer 4157477 t.n.v. S. Garst te Oude Tonge.

▶ Gegevensbeveiliging en Discrete Wiskunde

Henk van Tilborg

Inleiding

Al lang geleden wisten militairen dat het onderscheppen van de berichten van de vijand veel voordeel kon opleveren (denk hierbij aan de geheimcode Enigma, die de Duitsers in de Tweede Wereldoorlog gebruikten en die de Engelsen met de nodige inspanning konden kraken). In de zeventiger jaren deed zich op veel grotere schaal een analoog probleem voor, toen computergebruikers via data-netwerken met elkaar verbonden werden en toen 'hackers' zich illegaal toegang wisten te verschaffen tot de gegevensbestanden in die computers.
De traditionele oplossing voor het hierboven geschetste probleem is nu om alle gegevens te vercijferen m.b.v. een *cryptosysteem*, zoals die Enigma. Tegenwoordig worden daarbij heel gecompliceerde schema's gebruikt die op een chip staan en uiterst snel zijn. De bekendste hiervan heet DES. Deze is in 1977 als standaard ingevoerd door de Amerikaanse overheid.
Een kenmerk van al deze traditionele cryptosystemen is dat degene die de gegevens vercijfert met degene die de gegevens later ontcijfert een zgn. *sleutel* afgesproken moet hebben. Bij de Enigma is dat de instelling van het apparaat, maar bij DES is dat een rijtje van 64 nulletjes en eentjes. Bij de meeste toepassingen van elektronische communicatie netwerken zal het voor de verstuurder van de gegevens zeer onpraktisch en vaak zelfs onmogelijk zijn om met iedere mogelijke ontvanger een aparte sleutel afgesproken te hebben. De ontvanger kan bijvoorbeeld aan de andere kant van de wereld zitten of van te voren zelfs niet bekend zijn.
In 1977 realiseerden de Amerikanen W. Diffie en M. E. Hellman zich voor het eerst dat het in principe mogelijk moet zijn dat iedere gebruiker een eigen vercijferingsmethode heeft en deze ook gewoon openbaar kan maken, zonder de daarbij horende ontcijferingsmethode prijs te geven. Het idee is nu dat de verzender van een boodschap eerst de vercijferingsmethode van de ontvanger opvraagt of opzoekt en deze methode dan op die boodschap toepast. Alleen de legitieme ontvanger kent de corresponderende ontcijferingsmethode en kan de boodschap ontcijferen.



De Enigma.

Strikt genomen kan bovenstaand idee niet gerealiseerd worden, maar in de praktijk wel degelijk. Een vergelijking maakt dit misschien duidelijk. Als de ontvanger voor het vercijferen een Nederlands-Armeens woordenboek beschikbaar stelt, maar het corresponderende Armeens-Nederlands woordenboek verborgen houdt, dan zal hij zelf de boodschap gemakkelijk kunnen ontcijferen (= terugvertalen). Een afluisteraar, die alleen maar het Nederlands-Armeens woordenboek kan inzien, kan de tekst niet terugvertalen, tenzij hij bereid is voor elk Armeens woord in de tekst het hele Armeens-Nederlands woordenboek door te spellen totdat het corresponderende Nederlandse woord gevonden is!
Diffie en Hellman zagen wel in dat hun ideeën in principe uitgevoerd moesten kunnen worden, maar kwamen toch nog niet meteen met concrete voorstellen. Later kwamen die wel, ook van anderen. Het meest bekende systeem heet het RSA-systeem, dat we verderop zullen behandelen. Het werd in 1978 geïntroduceerd en is genoemd naar de drie auteurs R. L. Rivest, A. Shamir en L. Adleman. Dit systeem maakt gebruik van een stukje *elementaire getaltheorie*, dat tegenwoordig vaak in cursussen discrete wiskunde behandeld wordt, vanwege de toepassingsmogelijkheden bij bepaalde telproblemen.

Enige wiskunde

Met getallen zullen in het vervolg enkel gehele getallen worden bedoeld. De berekeningen zullen steeds *modulo*-berekeningen zijn. Dat betekent dat er een geheel getal n gegeven is en dat we twee getallen zullen identificeren wanneer hun verschil een geheel veelvoud van n is. In het bijzonder zullen we elk getal k identificeren met het unieke getal r waarvoor geldt $0 \leq r < n$ en $k = qn + r$ voor een zekere q. (Het getal r is de niet-negatieve rest na deling van k door n). We schrijven
$3 \times 6 \equiv 4 \pmod 7$,
want $3 \times 6 = 18$ en 18 geeft na deling door 7 de niet-negatieve rest 4 (spreek $\equiv$ uit als 'is congruent met' en (mod 7) als 'modulo 7').
De kracht van het modulo-rekenen zit in zijn fraaie rekeneigenschappen. Door steeds getallen te vervangen door hun rest modulo n kan heel snel gerekend worden. Bijvoorbeeld:
$3^6 \equiv (3^2)^3 \equiv 9^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$
Deze laatste congruentie geldt veel algemener, zoals uit de volgende stelling blijkt.

Stelling 1 (Fermat) Als p een priemgetal is en a is niet deelbaar door p dan geldt
$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Euler generaliseerde deze stelling tot

Stelling 2 (Euler) Als n een geheel getal is en a heeft geen factor gemeen met n dan geldt
$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$,

waarbij $\phi(n)$ het aantal getallen kleiner dan n telt dat geen factor met n gemeen heeft. Voor een priemgetal p geldt dus $\phi(p) = p - 1$. In zijn algemeenheid, als $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de verschillende priemfactoren in n voorstellen, geldt

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_n}).$$

Een voorbeeld van de Stelling van Fermat is hierboven al gegeven voor $p = 7$ en $a = 3$. Als voorbeeld van de Stelling van Euler nemen we $n = 17 \times 19 = 323$. Er geldt nu $\phi(323) = 323(1 - \frac{1}{17})(1 - \frac{1}{19}) = (17 - 1)(19 - 1) = 288$. Daar bijvoorbeeld 111 geen factor gemeen heeft met $323 (= 17 \times 19)$ weten we nu dat
$111^{288} \equiv 1 \pmod{323}$.

We zullen de Stellingen van Fermat en Euler hier niet bewijzen. De (korte) bewijzen kunnen op veel plaatsen gevonden worden ([1] en [3]).
Het RSA-systeem berust op drie gegevens: i) de Stelling van Euler, ii) het feit dat het in het algemeen erg moeilijk is om grote getallen te factoriseren en iii) een uitbreiding van het Algoritme van Euclides: bij twee getallen u en v bestaan getallen r en s zodat $\mathrm{ggd}(u, v) = ru + sv$. Deze uitgebreide versie levert dus niet alleen de $\mathrm{ggd}(u,v)$ van u en v, maar ook deze getallen r en s. Bijvoorbeeld met

$u = 175$ en $v = 288$ krijgt men niet alleen dat ggd(175,288) = 1, maar ook dat ggd(175,288) = 1 $= 79 \times 175 + (-48) \times 288$ (zie [1] of [3]).
Uit deze gelijkheid volgt overigens dat
$79 \times 175 \equiv 1 \pmod{288}$.

Het RSA-systeem

We zullen aan de hand van deelnemer Bob laten zien wat voor voorbereidingen iedere deelnemer moet uitvoeren.
Bob kiest zijn eigen twee priemgetallen p_B en q_B. Bijvoorbeeld $p_B = 17$ en $q_B = 19$. Bob berekent hiermee het produkt $n_B = p_B q_B$ (dus $n_B = 323$) en voorts $\phi(n_B)$ (dus hier $\phi(n_B) = 16 \times 18 = 288$).
Bob kiest verder een getal e_B dat geen factor gemeen heeft met $\phi(n_B)$, bijvoorbeeld $e_B = 175$. Met de uitgebreide versie van het Algoritme van Euclides kan Bob nu snel een d_B bepalen die voldoet aan $e_B \times d_B \equiv 1 \pmod{\phi(n_B)}$. Voor Bob is dit al in de vorige paragraaf gedaan: $d_B = 79$, want $79 \times 175 \equiv 1 \pmod{288}$.
Bob maakt nu de getallen e_B en n_B bekend, maar houdt de andere getallen geheim. Vercijfering van boodschappen voor Bob gaat nu als volgt: vertaal je boodschap in een of meer getallen m, $1 \leq m < n_B$. Stuur echter niet zo'n m maar wel het resultaat c van de berekening $m^{e_B} \pmod{n_B}$.
Bijvoorbeeld, als deelneemster An boodschap $m = 111$ naar Bob wil sturen, zoekt An eerst de (bekende) $e_B = 175$ en $n_B = 323$ van Bob op. Ze berekent vervolgens $111^{175} \equiv 138 \pmod{323}$ en stuurt dan $c = 138$ naar Bob.
Hoe kan Bob nu zo'n boodschap c weer ontcijferen? Het antwoord is heel simpel. Bob berekent met zijn geheime d_B de waarde van $c^{d_B} \pmod{n_B}$ en dit is nu precies m. Inderdaad geldt met $d_B = 79$ voor Bob dat $c^{79} \equiv 111 \pmod{323}$. De rechtvaardiging hiervan ligt in de Stelling van Euler (ook in zijn algemeenheid), immers

$$c^{79} \equiv (111^{175})^{79} \equiv 111^{175 \times 79} \equiv 111^{1 + 48 \times 288} \equiv$$
$$\equiv 111 \times (111^{288})^{48} \equiv 111 \times 1^{48} \equiv$$
$$\equiv 111 \pmod{323}.$$

Een afluisteraar (of hacker) H kan op dezelfde manier de boodschap c voor Bob ontcijferen tot m, als hij d_B maar kent. Met hetzelfde Algoritme van Euclides is dit zeer eenvoudig als H maar $\phi(n_B)$ kent. Met andere woorden: als H de factorisatie van n_B kent (in p_B en q_B) kan H de boodschap c ook ontcijferen. Om dit nu te verhinderen moeten p_B en q_B veel groter gekozen worden, en wel elk minstens 100 cijfers lang! Een n_B van 200 cijfers is voorlopig zelfs op de krachtigste computers niet te factoriseren. Een andere methode om dit systeem aan te vallen is niet bekend tot heden toe.
Uiteraard hoort nog een discussie bij de behandeling van dit RSA-systeem. Bijvoorbeeld: hoe vind je efficiënt zulke grote priemgetallen, zijn alle priemgetallen veilig of hoe verhef je m en c snel tot grote machten? We laten die discussie hier achterwege en verwijzen de lezer daarvoor naar [3].
Interessanter is eigenlijk dat het RSA-systeem ook gebruikt kan worden om boodschappen m te voorzien van een *handtekening*: een *bewijs* dat de boodschap inderdaad van Bob komt en niet van een ander (zelfs als Bob later ontkent).
Hiertoe stuurt Bob het resultaat c van de berekening $m^{d_B} \pmod{n^B}$, vervaardigd met d_B die alleen aan hem bekend is. Een ander kan deze boodschap dus niet gemaakt hebben! De ontvanger zoekt Bob's openbare e_B en n_B op en berekent $c^{e_B} \pmod{n_B}$ en vindt net zoals hierboven m terug.
Beide methodes kunnen ook gecombineerd worden, zodat bijvoorbeeld An een vercijferde boodschap met haar handtekening naar Bob kan sturen. Voor verdere details verwijzen we de lezer naar [3], waar ook referenties naar andere boeken gevonden kunnen worden. Voorts willen we de lezer ook op het zeer lezenswaardigde [2] attenderen.
Hopelijk heeft bovenstaande uiteenzetting duidelijk gemaakt hoe in de cryptologie gebruik gemaakt wordt van diverse onderdelen van de discrete wiskunde, in dit geval de elementaire getaltheorie.

Referenties

[1] Cursus *Discrete wiskunde*, Deel 3 Getaltheorie, Open universiteit, 1990.
[2] Van de Craats, Jan, *Pasjes en Pincodes*, Aramith Uitgevers, Bloemendaal, 1991.
[3] Van Tilborg, Henk C.A., *An Introduction to Cryptology*, Kluwer Academic Publishers, Boston etc, 1988.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

Opgave 632

In veel landen vindt elk jaar de Wiskunde Olympiade plaats. In Nederland vond de eerste Olympiade plaats in 1962. Zo langzamerhand publiceert men in bijna elk land verzamelbundels. In ons land verscheen in 1981 de eerste bundel, waarvan een tweede druk in 1985 verscheen. Titel: 'De Nederlandse Wiskunde Olympiaden (de opgaven van de eerste ronden vanaf 1962)' verzameld door W. Kleijne. (B.V. Uitgeverij NIB, Zeist).

In Schotland staat deze wedstrijd onder leiding van de 'Scottish Mathematical Council'. De wedstrijd heet daar de 'Mathematical Challenge'. In 1989 zijn de opgaven van 1976 t.e.m. 1988 gebundeld tot het boek 'Mathematical Challenges' (Blackie & Sons Ltd., London). In tegenstelling tot de Nederlandse uitgave staan hierin niet alleen de antwoorden, maar ook de volledige uitwerkingen.
Een variant op een van de opgaven kan als oudejaarspuzzel dienen:

Gegeven is de getallenverzameling V met de eigenschappen:

$1 \in V$.
Als $x \in V$ en $y \in V$, dan ook $2x + 5y \in V$.

Bewijs dat $3 \cdot 10^{1991} + 13 \in V$ en dat ook $3 \cdot 10^{1992} + 13 \in V$.

Na een goed en succesvol puzzeljaar 1991, wens ik u nu een nog beter puzzeljaar 1992 toe!

Degene die binnen een maand een correct bewijs instuurt, ontvangt 5 punten op zijn of haar puzzelladder.
Als men vaak genoeg inzendt staat men uiteindelijk bovenaan de ladder en ontvangt men als prijs een boekenbon ter waarde van vijfentwintig gulden. Dit is pure winst, want op dat moment is men nog lang niet zoveel aan postzegels kwijt!

Oplossing 629

Als we in een rechthoekig assenstelsel Oxy lijnen trekken door de punten $A(a, 0)$ en $B(0, 1 - a)$ met $a \in \mathbf{R}$, dan ontstaat er in het eerste kwadrant een figuur. Alle lijnen AB raken aan deze kromme (officieel *omhullende* genoemd).
Een vergelijking van de lijn AB met variabele a is gemakkelijk op te stellen:

$$y = \frac{a-1}{a}x + 1 - a.$$

Dit is te schrijven als $a^2 + (y - x - 1)a + x = 0$.
Deze lijn is raaklijn aan de omhullende, dus de discriminant $D = 0$. De vergelijking van de omhullende wordt dan:
$(y - x - 1)^2 - 4x = 0$.

Markus Nijmeijer (15) uit Sittard laat na de coördinatentransformatie $s = x - y$ en $t = x + y$ zien dat onze omhullende de parabool $s^2 = 2t - 1$ is. Kenmerken van onze omhullende: een parabool met top $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, brandpunt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en richtlijn $y = -x$.

'In het algemeen kan men de omhullende van een stelsel krommen $F(x, y, a) = 0$ vinden door naar a te differentiëren en uit $F(x, y, a) = 0$ en $\frac{dF(x, y, a)}{da} = 0$ de a te elimineren', aldus *Lourens van den Brom* (24) uit Krommenie.

Jack Schilder (9) uit Groningen had jaren geleden al een plankje gemaakt met spijkertjes erin, waarop draad was gespannen. Nog steeds wordt dit veel gedaan. Meestal worden er parabolen gemaakt. Er zijn echter vele figuren mogelijk: hyperbolen, cardioïden, nephroïden, astroïden, epicycloïden, enz.

Een prachtig boek hierover is in 1989 verschenen:
'Curve Stitching' door Jon Millington (Tarquin Publ., Norfolk). Inclusief bewijzen en computerprogramma's om deze figuren op het scherm te krijgen. De kunstenaars Naum Gabo, Henry Moore en anderen hebben ruimtelijke omhullenden gemaakt (Wiskunst dus!).

De ladder staat op 29 punten met als winnaar de oud-Hagenaar

Jan Essers,
Esscheweg 236,
5262 LD Vught.

Gefeliciteerd met de boekenbon van f25,–.

Mededeling

Brochures Keuzebegeleiding Wiskunde A en B

Evenals vorig jaar worden de twee brochures Keuzebegeleiding Wiskunde A en B op het havo weer aan leerlingen, docenten, decanen en schoolleiders aangeboden. De verwerking van de aanvragen zal dit jaar gaan via de sector HBO-β van de Hogeschool Holland welke de werkzaamheden met betrekking tot de HAWEX-brochures-verspreiding heeft overgenomen van het Project Wiskunde en Emancipatie.
De inhoud van de brochures is onveranderd gebleven ten opzichte van vorig jaar. Hieronder volgt een korte inhoudsbespreking van beide brochures.

Brochure voor leerlingen:
In de leerlingbrochure wordt een korte omschrijving gegeven van de inhoud van beide wiskundevakken. Daarnaast wordt aangegeven voor welke vervolgopleidingen wiskunde A en voor welke wiskunde B het meest geschikt is.
In de brochure zijn voor beide vakken enkele voorbeeldopdrachten opgenomen, zodat de brochure met derde klassen is door te nemen.

Brochure voor docenten:
In deze brochure wordt allereerst een omschrijving van de inhoud van beide vakken gegeven. Vervolgens gaat men in op de eisen/wensen die vervolgopleidingen stellen t.a.v. wiskunde A en wiskunde B. Er wordt aandacht besteed aan de gevolgen van twee wiskundevakken voor de organisatie van de school. Er worden wat mogelijkheden besproken om leerlingen te begeleiden bij hun keuze voor wiskunde. Verder wordt er kort ingegaan op de betekenis van beide vakken voor mavo-leerlingen en het verschil tussen jongens en meisjes bij keuzebegeleiding. Tot slot is het eindexamenprogramma voor wiskunde A en wiskunde B voor het havo opgenomen en de eindexamenopgaven van mei 1990.

De brochures zijn schriftelijk te bestellen bij:

Hogeschool Holland
sector HBO-β
Wildenborch 6
1112 XB Diemen

onder vermelding van:

naam school
adres school
telefoonnummer school
contactpersoon
aantal leerlingenbrochures à *f* 1,00, exclusief verzendkosten
aantal docentenbrochures à *f* 2,00, exclusief verzendkosten.

Boekbespreking

U. Storch, H. Wiebe, *Lehrbuch der Mathematik, Band II: Lineare Algebra*, B.I.-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich, 664 blz., D.M. 68,–.

Van het Lehrbuch der Mathematik zijn nu verschenen Band I: Analysis einer Veränderlichen (reeds eerder besproken in Euclides) en Band II: Lineare Algebra. In voorbereiding zijn Band III: Analysis mehrerer Veränderlicher – Integrationstheorie en Band IV: Analysis auf Mannigfaltigkeiten – Funktionentheorie – Funktionalanalysis.

In Band II komen aan de orde: Lineare Gleichungssysteme, Affine Räume, Homomorphismen, Lineare und affine Abbildungen, Restklassenbildung, Exakte Sequenzen, Matrizen und Determintanten, Elementarteilersatz, Orientierung, Eigenwerte, Jordansche Normalform, Bilinear- und Sesquilinearformen, Symmetrische und komplex-hermitesche Formen, Euklidische und unitäre Räume (o.a. zelfgeadjungeerde operatoren), Minkowski-Räume, Lorenz-Gruppen, Banach-und Hilbert-Räume (o.a. de 'rijtjesruimtes'), Exponentialabbildung und Lie-Algebren, Klassische Gruppen, Fourier-Reihen (met o.a. de 'snelle Fourier-transformatie', F.F.T.), Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten und nichtkonstanten Koeffizienten, Picard-Lindelöf-Iteration.
In een aanhangsel worden de grondbegrippen van de topologie behandeld (o.a. Hausdorff-ruimtes); in Band III wordt deze stof uitvoerig aan de orde gesteld.
Veel voorbeelden verduidelijken de definities en geven vaak uitbreiding van de theorie, terwijl een groot aantal opgaven de mogelijkheid biedt de stof te verwerken en te verdiepen.
Tafels zijn opgenomen over Legendre-polynomen en Legendre-functies van de tweede soort. Het boek besluit met een literatuurlijst, een lijst van de gebruikte symbolen en een naam- en zaakregister.

Evenals Band I ziet ook dit deel er zeer verzorgd uit. Drukfouten komen nagenoeg niet voor; storend is een fout op blz. 80 in de definitie van een K-Algebra, alsmede op blz. 636 een onjuistheid in één van de Legendre-polynomen.
Samen met de andere drie delen geeft dit boek de stof voor het 'Mathematik-Grundstudium für Mathematiker, Physiker und Informatiker' aan de Ruhr-Universität Bochum. Als naslagwerk kan het goede diensten bewijzen; aan docenten aan lerarenopleidingen kan kennismaking met het boek zeer worden aanbevolen.

G. M. Hogeweij

Verschenen

Murdock, James A.: *Peturbations, Theory and Methods*; John Wiley and Sons; £ 43.65; 509 blz.
De auteur stelt zich tot doel de Storingsrekening uit te tillen boven het niveau van een doos met trucs. Daarom wordt meer dan gebruikelijk aandacht besteed aan de wiskundige fundamenten van de beschreven methoden. Deel I: Introduction; deel II: Oscillatory Phenomema; deel III: Transition Layers.

G. Baley Price: *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*; Marcel Dekker; $ 119.50; 424 blz.
Dit boek behandelt twee onderwerpen: de klasse van Banach algebra's die bekend staan als Multicomplexe Ruimten en de theorie van holomorfe functies op deze ruimten. Uitgebreid wordt de Bicomplexe ruimte C(2) onderzocht: $a + bi + cj + dij$ met $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ en $i^2 = j^2 = -1$ en $ij = ji$, waarbij de nadruk ligt op generalisaties van eigenschappen uit C (machtreeksen, Taylorreeksen, Cauchy's stelling). Aan het eind worden ruimten van hogere dimensie bekeken.

Mededeling

Voorlichting Volwassenenonderwijs

De NVvW organiseert op 18 januari 1992 van 11.00 - 15.00 uur in het Jaarbeurscongrescentrum te Utrecht een bijeenkomst voor wiskundedocenten in het volwassenenonderwijs. De bedoeling is informatie te geven over de nieuwe leerplannen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs en het nieuwe examenprogramma lbo/mavo.
Aanmelding voor 16 januari 1992 door overmaking van *f* 25,– (leden *f* 15,–) naar giro 143917 t.n.v. NVvW te Amsterdam onder vermelding van 'volwassenenonderwijs'. Alleen als de deelname te gering is, krijgt u bericht (mits uw telefoonnummer vermeld is).

COW-publikaties

De COW heeft inmiddels heel wat publikaties uitgebracht. Hiertoe behoren diverse leerstofpakketten, de examenbundel 1991, een vernieuwd concept-examenprogramma lbo/mavo C/D (uitgereikt aan degenen die dit najaar de regionale bijeenkomsten bezochten), en het Trajectenboek (waarvan de in september met Euclides meegezonden Leerstofbeschrijving wiskunde 12-16 een uittreksel is).
Om het belangstellenden gemakkelijk te maken de COW-publikaties te bestellen is een geactualiseerde bestellijst verkrijgbaar bij de COW, per adres SLO, t.a.v. Evelien Veltman, Postbus 2041, 7500 CA Enschede, telefoon 053-84 03 39.

Boekbespreking

D. Wickmann: *Bayes-Statistik*; BI Wissenschafts Verlag Mannheim; 39 DM; 248 blz.

Het vertrekpunt van dit boek is het nemen van beslissingen onder onzekerheid. Dit leidt op een natuurlijke wijze tot gebruik van het Bayesiaans paradigma en de nauw daarop aansluitende formele beslissingstheorie.

Aan de hand van concrete voorbeelden wordt de invloed van observaties op de waarschijnlijkheid van hypothesen behandeld, waarbij in hoofdstuk 2 de fundamentele eigenschappen van waarschijnlijkheidsrekening worden geïntroduceerd.
Zowel discrete als continue verdelingen worden kort behandeld in hoofdstuk 3 en het Theorema van Bayes komt in hoofdstuk 4 uitgebreid aan de orde voor discrete verdelingen.
Beslissingstheorie wordt behandeld in het volgende hoofdstuk, terwijl hoofdstuk 6 dit alles uitbreidt naar continue parameterruimten. Sectie 6.10 bevat een lang, maar illustratief voorbeeld waar zelfs punt- met intervalhypothesen worden vergeleken. Verder worden in dit hoofdstuk nog wat continue verdelingen behandeld. Het laatste hoofdstuk is interessant voor de meer gevorderde lezer. Klassieke en Bayesiaanse standpunten worden naast elkaar gezet en een korte paragraaf beschrijft 'niet informatieve' prior verdelingen.

Samengevat: een aan te bevelen boek met nuttige oefeningen en goede voorbeelden in de tekst en zelfs een appendix met computerprogramma's (in Pascal) voor verdelingsfuncties. Als enige minpunten vallen het ontbreken van een index op en het feit dat geen korte samenvattingen per hoofdstuk worden gegeven: de lezer moet eigenlijk alles lezen, maar dat is in dit geval eerder een plezier.

Mark F. J. Steel

Kalender

11 december 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
13 of 14 december 1991: Voorronde Wiskunde A-lympiade op de scholen voor vwo.
4 januari 1992: Wintersymposium Wiskundig Genootschap te Amersfoort. Zie de mededeling op blz. 122 van dit nummer.
15 januari 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
28 en 29 februari 1992: Wiskunde A-lympiade te Garderen.
12 februari 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
20 maart 1992: eerste ronde Wiskunde Olympiade op de scholen voor havo en vwo.
4 september 1992: tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit te Eindhoven.

Inhoud